8. Gewöhnliche Differentialgleichungen (ODE)

8.1 Motivation

Aus der auf einen Massepunkt wirkenden Kraft seine Bahnkurve ermitteln → "Integration der Newton´schen Bewegungsgleichung" $\underline{F}(\underline{r}) = m\frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = m\ddot{\underline{r}}$

(Grundaufgabe der Mechanik)

8.2. Einige Grundbegriffe

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

ODE erster Ordnung (explizite Form). Gesucht wird eine Funktion y(x), die

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x))$$

erfüllt. Geometrisch: Gesamtheit aller Tangenten in der x-y-Ebene definiert ein → **Richtungsfeld**. Die gesuchte Lösungskurve muss sich an dieses Richtungsfeld „anschmiegen“

→ **Existenz und Eindeutigkeit**

→ **Anfangs- und Randbedingungen**

→ **Allgemeine Lösung** der ODE enthält unbestimmte Konstanten, die durch die Anfangsbedingungen festgelegt werden (N Anfangsbedingungen bei einer ODE n-ter Ordnung).

Einfache Beispiele:

■ $\frac{dy}{dx} = f(x)$ rechte Seite nur von x abhängig, <u>erster</u> Ordnung

$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(x')\, dx' + \text{const}$ $y(x) \rightarrow$ **Stammfunktion** von f(x)

Der freie Parameter wird durch <u>einen</u> vorgegebenen Anfangswert festgelegt

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x')\, dx', \; y(x = x_0) = y_0$$

■ $\frac{dy}{dx} = g(y), \; \frac{dy}{g(y)} = dx, \; \int^{y} \frac{dy'}{g(y')} = x + \text{const}, \; \int_{y_0}^{y} \frac{dy'}{g(y')} = x - x_0$ (Umkehrfunktion)

■ $\frac{dy}{dx} = h(x)\, g(y)$ separable ODE 1. Ordnung

$$\frac{dy}{g(y)} = h(x)\,dx, \quad \text{Integration} \rightarrow \int_{y_0}^{y} \frac{dy'}{g(y')} = H(x) - H(x_0), \quad y(x = x_0) = y_0,$$

wobei H(x) die Stammfunktion von h(x) ist, also $\frac{dH}{dx} = h(x)$, und der Anfangswert bereits berücksichtigt wurde.

8.3 Lineare ODE n-ter Ordnung

$$y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + f_1(x)\, y'(x) + f_0(x)\, y(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \frac{d^k y}{dx^k} = L_n\, y = f(x), \quad (f_n(x) \equiv 1)$$

3 Sätze:

(i) Die homogene ODE $L_n\, y = 0$ hat genau n linear unabhängige Lösungen $y_1(x)$, … , $y_n(x)$.

(ii) Die allgemeine Lösung der homogenen ODE $L_n\, y = 0$ ist

$c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) + \ldots + c_n\, y_n(x)$

mit Konstanten c_i aus den Anfangsbedingungen $y(0)$, $y'(0)$, … , $y^{(n-1)}(0)$.

(iii) Die allgemeine Lösung der inhomogenen ODE $L_n\, y = f(x)$ ist

$y_0(x) + c_1\, y_1(x) + \ldots + c_n\, y_n(x)$, wobei $y_0(x)$ eine partikuläre Lösung von $L_n\, y = f(x)$ ist.

■ $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$

Lineare, homogene ODE zweiter Ordnung ($L_2 = x^2 \frac{d}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + 2$). Besonderheit: in jedem Term Anzahl der x-Potenzen gleich Ordnung der Ableitung.

Ansatz: $y = x^\lambda$, $x^\lambda \left[\lambda(\lambda - 1) - 2\lambda + 2 \right] = 0$, $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$

Allgemeine Lösung: $y(x) = c_1\, x + c_2\, x^2$.

8.4 Lineare ODE erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = p(x)\ y + q(x) \quad \text{(allgemeine explizite Form)}$$

<u>Homogene Gleichung</u>: Trennung der Variablen

$$\frac{dy}{y} = p(x)\ dx\,, \quad \ln y = \ln c + \int_{x_0}^{x} p(z)\ dz\,, \quad y(x) = c \exp\left(\int_{x_0}^{x} p(z)\ dz \right)$$

mit der freien Konstanten c $\rightarrow$ allgemeine Lösung der homogenen Gleichung.

<u>Inhomogene Gleichung</u>: partikuläre Lösung durch Variation der Konstanten

Lösungsansatz: $y(x) = c(x)\ \exp\left(\int_{x_0}^{x} p(z)\ dz \right)$

Einsetzen: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dc}{dx} e^{\int \cdots} + \underline{c\ p e^{\int \cdots}} = \underline{p\ y} + q\,, \quad \dfrac{dc}{dx} = q\, e^{-\int \cdots}\,.$

Die letzte Gleichung ist unmittelbar integrierbar $\quad c(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} du\ q(u)\ \exp\left(-\int_{x_0}^{u} p(z)\ dz \right) + c(x_0)\,.$

<u>Allgemeine Lösung</u> (unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $y(x = x_0) = y_0$

$$y(x) = y_0\, e^{P(x)} + \int_{x_0}^{x} q(z)\ e^{P(x) - P(z)}\, dz\ , \qquad P(x) = \int_{x_0}^{x} p(z)\ dz\ ,$$

d.h., P(x) ist die Stammfunktion von p(x).

8.5 Lineare ODE zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a(x)\,\frac{dy}{dx} + b(x)\,y(x) = f(x)$$

■ Kleine eindimensionale Schwingungen um eine stabile Gleichgewichtslage

$U(q) \approx U(q_0) + \frac{k}{2}(q - q_0)^2$. Setze $q - q_0 =: x \to$ Auslenkung aus Ruhelage und $U(q_0) = 0$.

Bewegungsgleichung: $m\ddot{x} = -k\,x$, $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Homogene lineare ODE 2. Grades <u>mit konstanten Koeffizienten</u>. Da $\sin\omega t$ und $\cos\omega t$ zwei linear unabhängige Lösungen, ist die allgemeine Lösung:

$$x(t) = c_1 \sin\omega t + c_1 \cos\omega t \underbrace{=}_{\text{Additionstheorem}} a\cos(\omega t + \varphi)$$

$\to$ harmonische Schwingungen um Gleichgewichtslage; a – Amplitude, φ – Phase, ω - (Kreis)Frequenz, unabhängig von AB (für kleine Auslenkungen!).

Elegantere Darstellung der allgemeinen Lösung: $x(t) = \mathrm{Re}\left\{A\,e^{i\omega t}\right\}$ mit $A = a\,e^{i\varphi}$.

A ist eine komplexe Amplitude, ihr Betrag ist gleich der Schwingungsamplitude a, ihr Argument gleich der Anfangsphase der Schwingung:

$$x(t) = \mathrm{Re}\left\{a\,e^{i\varphi}\,e^{i\omega t}\right\} = a\cos(\omega t + \varphi) .$$

Solange man nur lineare Operationen ausführt (Addition, Multiplikation mit einer Konstanten, Differentiation und Integration) kann man das Zeichen Re weglassen und erst im Endresultat berücksichtigen. Bei nichtlinearen Operationen, z.B. Quadrieren, gilt das nicht, da für komplexe Zahlen im allgemeinen Re $(A^2) \neq (\mathrm{Re}\ A)^2$.

■ Allgemeiner Fall erzwungene Schwingungen um Gleichgewichtslage unter dem Einfluss einer beliebigen (nicht notwendig periodischen) Kraft F(t) (vgl. L^2, Bd. I, S. 76):

$$\ddot{x} + \omega^2 x^2 = \frac{1}{m} F(t) .$$

$$\frac{d}{dt} \underbrace{(\dot{x} + i\omega x)}_{\varsigma(t) = \dot{x} + i\omega x} - i\omega(\dot{x} + i\omega x) = \frac{1}{m} F(t) \quad \text{also} \quad \dot{\varsigma} - i\omega\varsigma = \frac{1}{m} F(t) .$$

Diese lineare inhomogene ODE erster Ordnung wird wie in **8.4** erläutert gelöst:

- allgemeine Lösung der homogenen Gleichung: $\varsigma(t) = A\, e^{i\omega t}$, $A = \text{const}$

- partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung durch Variation der Konstanten

Ansatz $\varsigma(t) = A(t) e^{i\omega t}$ führt auf $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{m} F(t) e^{-i\omega t}$, d.h., die allgemeine Lösung ist

$$\varsigma(t) = e^{i\omega t} \left(\frac{1}{m} \int_0^t F(t) e^{-i\omega t} dt + \varsigma(t = 0) \right) .$$

Die gesuchte Funktion x(t) ergibt sich aus $x(t) = \frac{\mathrm{Im}\{\varsigma(t)\}}{\omega}$.

■ gedämpfte (1D) eindimensionale Schwingungen um eine stabile Gleichgewichtslage

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0 , \quad \frac{\gamma}{m} = 2\delta$$

Exponentialansatz: $x(t) = e^{\lambda t}$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$, $\lambda_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$

Allgemeine Lösung: $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$.

Fallunterscheidung:

(i) $\delta < \omega$ zwei komplex konjugierte Wurzeln

$$x(t) = \mathrm{Re}\left\{ \underbrace{A}_{ae^{i\varphi}} \exp(-\delta t + i\sqrt{\omega^2 - \delta^2}\, t \right\} = a\, e^{-\delta t} \cos(\omega_* t + \varphi)\ , \ \ \omega_* := \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$$

$\rightarrow$ gedämpfte Schwingung

(ii) $\delta > \omega$ zwei reelle Wurzeln

$$x(t) = c_1\, e^{-\left(\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2}\right) t} + c_2\, e^{-\left(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2}\right) t}$$

$\rightarrow$ aperiodische asymptotische Annäherung an die Gleichgewichtslage

(iii) $\delta = \omega$ Doppelwurzel

$x(t) = (c_1 + c_2 t)\, e^{-\delta t}$ $\quad\rightarrow$ aperiodischer Grenzfall.

8.6 Systeme linearer ODE mit konstanten Koeffizienten

Auch bei Systemen aus n gekoppelten linearen homogenen Differentialgleichungen

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{ik} y_k, \quad \frac{d\underline{y}}{dx} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{y}, \; i,k = 1,2,\ldots,n . \qquad (a_{ik} \text{ reell})$$

funktioniert der Exponentialansatz[1)]:

$$y_i(x) = C_i e^{\lambda x} \;\rightarrow\; (\lambda \delta_{ik} - a_{ik}) C_k = 0$$

Das ist ein System aus n homogenen algebraischen Gleichungen für n unbekannte Konstanten C_k. Notwendig und hinreichend für nichttriviale Lösungen (nicht alle $C_k = 0$) ist:

$$\text{Det}(\lambda \delta_{ik} - a_{ik}) = 0 \;\rightarrow \text{charakteristische Gleichung.}$$

Polynom der Ordnung n in λ mit genau n Lösungen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ $\rightarrow$ EW von $\underline{\underline{A}}$. Die EW können komplex und zum Teil einander gleich sein $\rightarrow$ Entartung.

Hat man n verschiedene EW λ_μ, erhält man die allgemeine Lösung des ODE Systems durch Überlagerung der $e^{\lambda_\mu x}$ $\mu = 1, 2, \ldots, n$

$$y_i(x) = \sum_{\mu=1}^{n} a_\mu \, C_i^\mu \, e^{\lambda_\mu x} .$$

[1)]Beachte: Eine homogene lineare ODE n-ter Ordnung ist äquivalent zu einem System aus n gekoppelten linearen ODE 1. Ordnung.