9. Felder

Skalare Felder: z.B. Druck- oder Temperaturverteilung $p(\underline{r},t)$ bzw. $T(\underline{r},t)$, Dichten von Masse, Ladung, Energie und anderen skalaren Größen.

Vektorielle Felder: z.B. Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit $\underline{u}(\underline{r},t)$ und vor allem Kraftfelder.

- Gravitationsfeld (der Masse M)

$$\underline{F}(\underline{r}) = -\gamma \frac{mM}{r^2}\frac{\underline{r}}{r}$$ Kraft auf Masse m

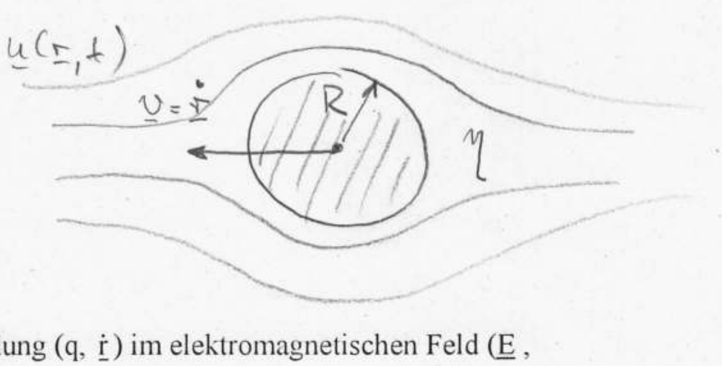
Zuordnung: $\underline{r} \mapsto \underline{F}(\underline{r}) \rightarrow$ jedem Ortsvektor eine Kraft (Vektor)

- Coulomb-Feld (der Punktladung Q)

$$\underline{F}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\frac{\underline{r}}{r}$$ Kraft auf Punktladung q

- Stokes´sche Kraft: Reibungskraft auf eine (laminar) umströmte Kugel (Radius R) in einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeit (dynamische Viskosität η)

$$\underline{F}(\dot{\underline{r}}) = -6\pi\eta R\,\dot{\underline{r}}$$



(im turbulenten Bereich ist F proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit)

- Lorentz-Kraft auf eine bewegte Punktladung (q, $\dot{\underline{r}}$) im elektromagnetischen Feld ($\underline{E}$, $\underline{B}$)

$$\underline{F}(\underline{r},\dot{\underline{r}},t) = q\left[\,\underline{E}(\underline{r},t) + \dot{\underline{r}}\times\underline{B}(\underline{r},t)\right]$$

9.1 Gradient eines skalaren Feldes

Zuordnung: $\underline{r} \mapsto \phi(\underline{r}) \rightarrow$ jedem Ortsvektor $\underline{r}$ (Punkt im Raum) eine skalare Größe ϕ

Vorbemerkung: Kettenregel bei Funktionen mehrerer Veränderlicher

Für $\phi(x(t))$ gilt $\dfrac{d\phi(x(t))}{dt} = \dfrac{d\phi(x)}{dx}\dfrac{dx(t)}{dt}$.

Für eine Funktion ϕ mehrerer unabhängiger Veränderlicher, z. B. $\phi(x_1(t_1), x_2(t_2), x_3(t_3))$, gilt

$$\frac{d\phi}{dt_1} = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt_1} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \equiv \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)_{x_2 = x_3 = \text{const}}$$

$\rightarrow$ partielle Ableitung von ϕ nach x_1.

Hängt ϕ implizit nur von einer unabhängigen Variablen (z.B. t) ab, dann ändern sich mit t alle x_i gleichzeitig. In diesem häufig anzutreffenden Fall gilt

$$\frac{d\phi(x_1(t), x_2(t), x_3(t))}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}$$

(wie immer Summation über i, i = 1, 2, 3)

und man nennt $\dfrac{d\phi}{dt}$ die $\rightarrow$ "totale Ableitung" von ϕ nach t und $d\phi = \dfrac{d\phi}{dt}dt = \dfrac{\partial\phi}{\partial x_i}dx_i$ das $\rightarrow$ "totale Differential" von ϕ.

Im Folgenden sei die Stetigkeit des skalaren Feldes ϕ und seiner partiellen Ableitungen in allen Variablen vorausgesetzt. In diesem Falle lässt sich zeigen, dass für partielle Ableitungen zweiter Ordnung die Reihenfolge der Bildung der Ableitung keine Rolle spielt, also

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_j \partial x_i}$$

gilt.

Die Änderung eines skalaren Feldes $\phi(\underline{r}) = \phi(x,y,z)$ in Richtung $d\underline{r} = (dx, dy, dz)$ setzt sich additiv aus den Änderungen parallel zu den drei Koordinatenachsen zusammen

$$d\phi(x,y,z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz.$$

Def.: Das Vektorfeld mit den Komponenten

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) =: \operatorname{grad} \phi(\underline{r}) =: \underline{\nabla} \phi(\underline{r})$$

heißt **Gradientenfeld** des skalaren Feldes $\phi(\underline{r})$. Dabei bezeichnet $\underline{\nabla}$ den Vektor-Differential-operator $\underline{\nabla} = \underline{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \underline{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \underline{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$ → **Nabla-Operator** (in kartesischen Koordinaten!).

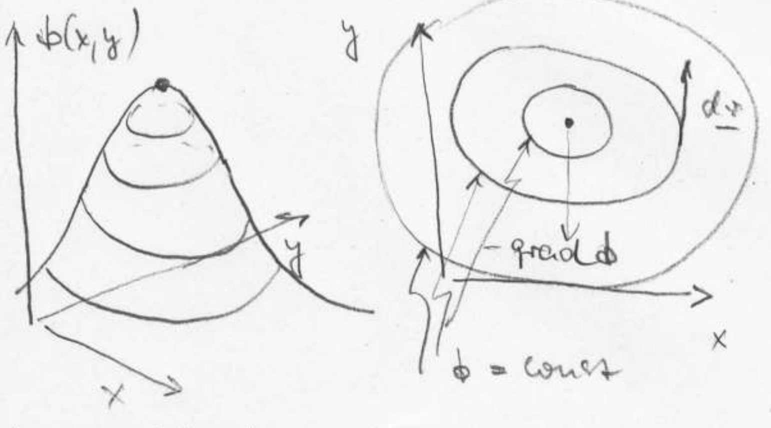
Offensichtlich gilt $\quad d\phi(\underline{r}) = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = \operatorname{grad} \phi(\underline{r}) \cdot d\underline{r} = \underline{\nabla}\phi(\underline{r}) \cdot d\underline{r}$

d.h., die Änderung des skalaren Feldes $\phi(\underline{r})$ in Richtung $d\underline{r}$ ist gleich der Projektion des Gradienten von ϕ im Punkt $\underline{r}$ auf $d\underline{r}$ → **Richtungsableitung**.

Bei der Anwendung des Operators $\underline{\nabla}$ auf Funktionen sind sowohl die Regeln der Vektoralgebra als auch die Differentiationsregeln zu beachten.

- Geometrische Veranschaulichung am Beispiel $\phi(x,y)$

Bei Bewegung entlang $\phi = \text{const}$ hat $d\underline{r}$ die Richtung der Tangenten an die Äquipotenziallinie und aus $d\phi = \operatorname{grad}\phi \cdot d\underline{r} = 0$ erkennt man, dass der Gradient senkrecht auf den Äquipotenziallinien steht (in Richtung des "steilsten Anstiegs im ϕ - Gebirge" zeigt), $|\operatorname{grad} \phi|$ also ein Maß für die Änderung von $\phi \perp$ zu $\phi = \text{const}$ ist.



9.2 Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes

Wir wenden den Nabla-Operator zunächst rein formal auf Vektorfelder $\underline{A}(\underline{r})$ an.

<u>1. Möglichkeit: Skalarprodukt</u> aus $\underline{\nabla}$ und $\underline{A}(\underline{r})$

Def.: Der Skalar

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{A}(\underline{r}) =: \operatorname{div}\underline{A}(\underline{r}) =: \frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial Ay}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\frac{\partial A_i}{\partial x_i}$$

heißt **Divergenz des** (stetig differenzierbaren) Vektorfeldes $\underline{A}(\underline{r})$ im Punkt $\underline{r}$. Das skalare Feld div $\underline{A}(\underline{r})$ wird → **Quellenfeld** von $\underline{A}(\underline{r})$ genannt.

<u>Geometrische Interpretation der Divergenz als lokale Quellstärke eines Strömungsfeldes:</u>

Ohne Beweis: Dichte $\rho(\underline{r},t)$ und Stromdichte $\underline{j}(\underline{r},t)=\rho(\underline{r},t)\cdot\underline{v}(\underline{r},t)$ genügen der Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\underline{j}=0$ (lokale Schreibweise der Masseerhaltung). Die über die Oberfläche eines infinitesimal kleinen Volumen δV um $\underline{r}$ ausfließende Flüssigkeitsmenge ist gleich der Abnahme der Dichte in δV, die Divergenz damit ein Maß für die Quellstärke des Feldes.

- $\operatorname{div}(\underline{A}\times\underline{B})=\underline{\nabla}\cdot(\underline{A}\times\underline{B}) \underset{\text{zyklisch}}{=} (\overset{\downarrow}{\underline{\nabla}}\times\overset{\downarrow}{\underline{A}})\cdot\underline{B}+(\overset{\downarrow}{\underline{B}}\times\overset{\downarrow}{\underline{\nabla}})\cdot\underline{A}=\underline{B}\cdot\operatorname{rot}\underline{A}\underset{!}{-}\underline{A}\cdot\operatorname{rot}\underline{B}$

(weitere Beispiele Übung)

2. Möglichkeit: Vektorprodukt aus $\underline{\nabla}$ und $\underline{A}(\underline{r})$

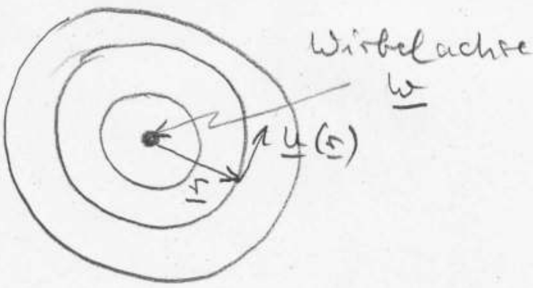
Def.: Der Vektor

$$\underline{\nabla}\times\underline{A}(\underline{r}) =: \mathrm{rot}\,\underline{A}(\underline{r}) =: \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\underline{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\underline{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\underline{e}_z$$

(also mit den Komponenten $(\mathrm{rot}\underline{A})_i = \varepsilon_{ijk}\dfrac{\partial A_k}{\partial x_j}$) heißt **Rotation des** (stetig differenzierbaren) Vektorfeldes $\underline{A}(\underline{r})$ im Punkt $\underline{r}$. Das Vektorfeld rot $\underline{A}(\underline{r})$ wird → **Wirbelfeld** von $\underline{A}(\underline{r})$ genannt.

Geometrische Interpretation der Rotation als lokale Wirbelstärke eines Strömungsfeldes:

Betrachte das Geschwindigkeitsfeld
$\underline{u}(\underline{r}) = \underline{\omega}\times\underline{r}$ eines homogenen Wirbels
in einer Flüssigkeitsströmung, ω = const
→ "Wirbelstärke". Dann ist



$$\mathrm{rot}\,\underline{u}(\underline{r}) = \underbrace{\underline{\nabla}}_{a}\times(\underbrace{\underline{\omega}}_{b}\times\underbrace{\underline{r}}_{c}) \underset{\text{Vektoralgebra}}{=} \underline{\omega}(\underline{\nabla}\cdot\underline{r}) - \underline{r}(\underline{\nabla}\cdot\underline{\omega}) \underset{\text{Differentiation}}{=} \underline{\omega}(\underline{\nabla}\cdot\underline{r}) - (\underline{\omega}\cdot\underline{\nabla})\underline{r} =$$

$$= \underline{\omega}\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right) - \begin{pmatrix}(\underline{\omega}\cdot\underline{\nabla})x\\(\underline{\omega}\cdot\underline{\nabla})y\\(\underline{\omega}\cdot\underline{\nabla})z\end{pmatrix} = 3\underline{\omega} - \begin{pmatrix}(\omega_x\frac{\partial}{\partial x}+\omega_y\frac{\partial}{\partial y}+\omega_z\frac{\partial}{\partial z})x\\(\underline{\omega}\cdot\underline{\nabla})y\\(\underline{\omega}\cdot\underline{\nabla})z\end{pmatrix} = 3\underline{\omega}-\underline{\omega} = 2\underline{\omega}\,.$$

Die Rotation zeigt in Richtung der Wirbelachse, der Betrag ist gleich der doppelten Wirbelstärke.

Anschauliche Interpretation: Feynman's infinitesimal kleines Schaufelrädchen ...

- Wenn $\underline{A}$ = grad ϕ, dann rot $\underline{A}$ = rot grad $\phi = 0 \rightarrow$ **Gradientenfelder sind wirbelfrei.**

$A_x = \frac{\partial\phi}{\partial x}$, $A_y = \frac{\partial\phi}{\partial y}$, $A_z = \frac{\partial\phi}{\partial z}$. Wegen $\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_j \partial x_i}$ für zweifach stetig differenzierbare ϕ

sind alle Komponenten von rot $\underline{A}$ gleich Null, z.B.

$$(\mathrm{rot\,grad}\,\phi)_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0\,.$$

Alternativ: $\mathrm{grad}\,\phi = \underline{\nabla}\phi$ hat die "Richtung von $\underline{\nabla}$", daher ist $\mathrm{rot\,grad}\,\phi = \underline{\nabla} \times \underline{\nabla}\phi = 0$.

- Wenn $\underline{B}$ = rot $\underline{A}$, dann div $\underline{B}$ = div rot $\underline{A} = 0 \rightarrow$ **Wirbelfelder sind quellenfrei.**

Komponentenweise z.B. $\quad \mathrm{div\,rot}\,\underline{A} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial A_k}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_j} = 0\,.$

Alternativ: "Spatprodukt" $\mathrm{div\,rot}\,\underline{A} = \underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\times\underline{A}) = 0\,.$

- Helmholtz´scher Hauptsatz der Vektoranalysis

Ein über einem einfach zusammenhängenden Gebiet mit (stückweise) glatter Randfläche definiertes Vektorfeld A lässt sich, sofern A asyptotisch $\sim r^{-2}$ abfällt, stets additiv in einen wirbelfreien und einen quellenfreien Anteil zerlegen:

$\underline{A}(\underline{r}) = \underline{A}_1(\underline{r}) + \underline{A}_2(\underline{r})$ mit $\mathrm{rot}\,\underline{A}_1(\underline{r}) = 0$ und $\mathrm{div}\,\underline{A}_2(\underline{r}) = 0$.

(vgl. S. Großmann, § 9.5., S. 312)

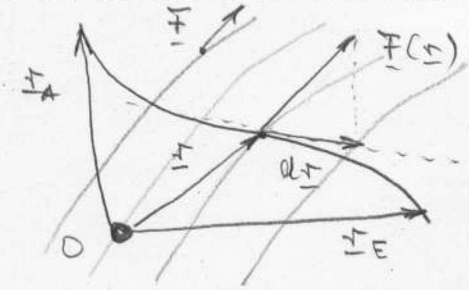
9.3 Konservative (Kraft)Felder, Energieerhaltung

Def.: Ein Vektorfeld (Kraftfeld) $\underline{F}(\underline{r})$ heißt konservativ, wenn sich $\underline{F}$ als Gradient eines skalaren Feldes $U(\underline{r})$ (Potenzial) darstellen lässt

$\underline{F}(\underline{r}) = -\operatorname{grad} U(\underline{r})$ (Vorzeichen Konvention).

• Arbeit im konservativen Kraftfeld: Angenommen, ein Körper K wird im Kraftfeld $\underline{F}(\underline{r})$ entlang einer Bahn C bewegt. Die bei infinitesimaler Verschiebung $d\underline{r}$ verrichtete Arbeit ist $\delta A = -\underline{F}\cdot d\underline{r}$. Die insgesamt entlang eines Weges C vom Feld an K verrichtete Arbeit ergibt sich zu

$$A = -\int_{\underline{r}_A, C}^{\underline{r}_E} \underline{F}\cdot d\underline{r} = \lim_{\substack{N\to\infty \\ (\max|\Delta\underline{r}_i|\to 0)}} -\sum_i \underline{F}(\underline{r}_i)\cdot\Delta\underline{r}_i\,,$$



sie ist im allgemeinen Fall neben $\underline{F}(\underline{r})$, $\underline{r}_A$ und $\underline{r}_B$ auch vom gewählten Weg C abhängig.

Für konservative Kraftfelder gelten folgende Sätze:

(i) Die entlang eines geschlossenen Weges verrichtete Arbeit ist gleich Null, denn

$$A = -\oint_C \underline{F}\cdot d\underline{r} = \oint_C \operatorname{grad} U\cdot d\underline{r} = \oint_C \left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right) = \oint_C dU = 0$$

(ii) Daraus folgt wegen $\int_{\underline{r}_A, C}^{\underline{r}_E} \underline{F}\cdot d\underline{r} = -\int_{\underline{r}_E, -C}^{\underline{r}_A} \underline{F}\cdot d\underline{r}$, dass die Arbeit in einem konservativen Kraftfeld wegunabhängig ist.

(iii) Ein Kraftfeld ist genau dann konservativ, wenn $\operatorname{rot} \underline{F}(\underline{r}) = 0$.

- Die Gravitationskraft ist konservativ, das zugehörige Potenzial ist $U(r) = -\gamma \frac{mM}{r} \rightarrow$

Gravitationspotenzial (vgl. Übungsblatt)

- Energieerhaltung bei Bewegung in einem konservativen Kraftfeld

Newton'sche Bewegungsgleichung: $m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} \,\big|\cdot \dot{\underline{r}} \rightarrow m\dot{\underline{r}} \cdot \ddot{\underline{r}} = \dot{\underline{r}} \cdot \underline{F}$,

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2\right)}_{\text{Zuwachs der kinetischen Energie}} = \underbrace{\frac{d\underline{r} \cdot \underline{F}}{dt}}_{\text{in dt am Teilchen geleistete Arbeit}} = -\frac{d\underline{r} \cdot \operatorname{grad} U}{dt} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz}{dt} = -\frac{dU}{dt}.$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 + U(\underline{r})\right] = 0 \quad \text{bzw.} \quad \underline{\frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 + U(\underline{r}) =: E = \text{const}}$$ **Erhaltung der mechanischen Energie**.