9.3 Zweifache Nabla-Anwendungen

- Wir kennen bereits $\underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\,\phi) = (\underline{\nabla}\times\underline{\nabla})\,\phi = 0$ [1)]

$$\text{rot}\,\text{grad}\,\phi = 0 \;\rightarrow\; \textbf{Gradientenfelder sind wirbelfrei}.$$

Bedeutet:

(i) Aus $\underline{F}(\underline{r}) = -\text{grad}\,\phi(\underline{r})$ folgt $\text{rot}\,\underline{F}(\underline{r}) = 0$ und umgekehrt, $\underline{F}(\underline{r})$ konservatives Kraftfeld (vgl. 9.2/9.3)

(ii) Kann als Operator-Identität $\underline{\nabla}\times\underline{\nabla} \equiv 0$ aufgefasst werden, weil für beliebige ϕ geltend.

Z.B. $(\underline{\nabla}\times\underline{\nabla})_z = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} \equiv 0$

- $\underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\times\underline{A}) \underset{\uparrow}{=} (\underline{\nabla}\times\underline{\nabla})\cdot\underline{A} = 0$

"Spatprodukt"$\rightarrow$ zyklische Vertauschungen, ohne $\underline{A}(\underline{r})$ vor die Operatoren zu ziehen

$$\text{div}\,\text{rot}\,\underline{A} = 0 \quad\rightarrow\quad \textbf{Wirbelfelder sind quellenfrei}.$$

(i) $$\text{div}\,\text{rot}\,\underline{A} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial A_k}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

■ Aus der dritten Maxwell`schen Gleichung div $\underline{B}$ = 0 (Magnetfeld quellenfrei, keine magnetischen Ladungen) folgt $\underline{B}$ = rot $\underline{A}$ → Existenz eines **Vektorpotenzial**s $\underline{A}$.
Beachte, dass die Gleichung div $\underline{B}$ = 0 viele Lösungen $\underline{A}$ hat: Angenommen, $\underline{B}$ = rot $\underline{A}_1$, $\underline{B}$ = rot $\underline{A}_2$, dann rot ($\underline{A}_1$ - $\underline{A}_2$) = 0, also $\underline{A}_1$ - $\underline{A}_2$ = grad χ mit einem beliebigen skalaren Feld $\chi(\underline{r})$.

- $\underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\,\phi) = (\underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla})\,\phi =: \Delta\,\phi$

$$\Delta =: (\underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ → **Laplace-Operator** (skalarer Operator)

$$\Delta\,\phi = \text{div}\,\text{grad}\,\phi$$

- $\underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{A}) = \underline{\nabla}\,(\underline{\nabla} \cdot \underline{A}) - (\underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla})\,\underline{A}$

  $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

  $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) \qquad \underline{b}\,(\underline{a} \cdot \underline{c}) \;-\; (\underline{a} \cdot \underline{b})\,\underline{c}$

  $$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\underline{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\underline{A} - \Delta\,\underline{A} \;,\quad \Delta\,\underline{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix}$$

- $\underline{\nabla}\,(\underline{\nabla} \cdot \underline{A}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\underline{A}$

■ Für quellenfreie Felder (z.B. das Strömungsfeld inkompressibler Flüssigkeiten) gilt wegen div A = 0 dann $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\underline{A} = -\Delta\,\underline{A}$.

Fazit: Darstellung $\underline{\nabla}$, $\underline{\nabla}\cdot$ bzw. $\underline{\nabla}\times$ vereinfacht das Rechnen,

Darstellung grad , div bzw. rot unterstützt die Anschauung/Interpretation.

10. Krummlinige Koordinaten

Motivation

Bisher: Kartesische Koordinaten mit $\underline{r} = x\,\underline{e}_x + y\,\underline{e}_y + z\,\underline{e}_z = x_i\,\underline{e}_i$. Einheitsvektoren (Basisvektoren) orthonormiert und raumfest.

Jetzt: Verwende der Symmetrie eines physikalischen Systems/Problems angepasste krummlinige Koordinaten, z.B. Zylinder- oder Kugelkoordinaten (sphärische K.).

Ein Punkt in der Ebene R^2 wird durch zwei Zahlen/Parameter festgelegt: $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

- kartesische Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ oder ebene Polarkoordinaten $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}$.

Ein Punkt im Raum R^3 wird durch drei Zahlen/Parameter festgelegt: $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$.

- Zylinderkoordinaten $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}$ oder ebene Kugelkoordianten $\begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix}$.

10.1 Funktionaldeterminante

Transformationsformeln (zweidimensionaler Fall)

$$\begin{matrix} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{matrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{matrix} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{matrix}$$

die den Übergang (x,y) $\rightarrow$ (u,v) und umgekehrt regeln, sollten im betrachteten Gebiet $G \in R^2$ zumindest lokal eindeutig sein.

■ ebene Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi &= \arctan\frac{y}{x} \end{aligned} \qquad \text{eineindeutig bis auf } r = 0.$$

Wir betrachten die Umgebung $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ eines Punktes $P(x,y)$. Es gilt (Taylor-Entwicklung in P(x,y))

$$\Delta u := u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) \cong \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y$$

$$\Delta v := v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y) \cong \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y$$

→ zu jedem Paar (Δx, Δy) in der Umgebung von P(x,y) existiert ein wohlbestimmtes Paar (Δu, Δv) in der Umgebung des Punktes P(u,v). Damit dies auch umgekehrt der Fall, also die Koordinatentransformation in der Umgebung von P eineindeutig ist, muss die Koeffizienten-determinante des obigen inhomogenen linearen Gleichungssystems ungleich Null sein.

Def.: Die von den partiellen Ableitungen der (u, v) nach (x, y) gebildete Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} =: \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

heisst → **Funktionaldeterminante der Transformation**.

Die oben betrachteten Transformationsformeln beschreiben in der Umgebung eines Punktes P genau dann eine eineindeutige Zuordnung (x,y) $\leftrightarrow$ (u,v), wenn $\left.\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|_{P(x,y)} \neq 0$.

Wegen der Gleichberechtigung der Parameterpaare ist auch $\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{P(u,v)} \neq 0$ zu erwarten.

Tatsächlich gilt $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}$.

■ Ebene Polarkoordinaten

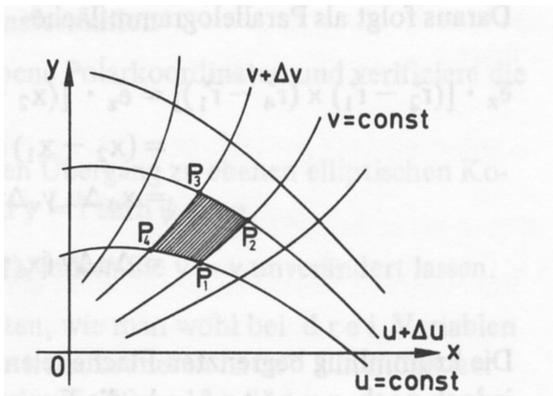
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi - (-r\sin^2\varphi) = r.$$

$$\frac{\partial(r,\varphi)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{r^3} - \left(-\frac{y^2}{r^3}\right) = \frac{x^2+y^2}{r^3} = \frac{1}{r}.$$

(Rücktransformation nicht eindeutig in $r = 0$).

- **Transformation von Flächenelementen**

Schraffierte Fläche für kleine $(\Delta u, \Delta v)$



$$A = \underline{e}_z \cdot \left[(\underline{r}_2 - \underline{r}_1) \times (\underline{r}_4 - \underline{r}_1)\right] =$$

$$= \underline{e}_z \cdot \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(y_4 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_4 - x_1) \doteq$$

Wegen

$$x_2 = x(u + \Delta u, v) \cong x_1 + \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u \;, \quad y_2 = y(u + \Delta u, v) \cong y_1 + \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u$$

$$x_4 = x(u, v + \Delta v) \cong x_1 + \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v \;, \quad y_4 = y(u, v + \Delta v) \cong y_1 + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v$$

folgt

$$A \doteq \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u \,\frac{\partial y}{\partial v}\Delta v - \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v = \Delta u\,\Delta v\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) = \Delta u\,\Delta v \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,.$$

Fazit: $dx\,dy = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv$ bzw. $\int dx\,dy\; f(x,y) = \int \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv\; f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$

→ Die krummlinig begrenzten Flächenelemente sind wie erwartet proportional zu du dv, der Proportionalitätsfaktor ist die Funktionaldeterminante und zwar genau an dem Punkt, an dem sich das Flächenelement befindet.

Offensichtlich ist das die Verallgemeinerung der Substitutionsregel $dx = \frac{dx}{du}du$ bei Variablentransformationen $x = x(u)$ im eindimensionalen Fall. Für die Transformation eines Volumenelements gilt entsprechend

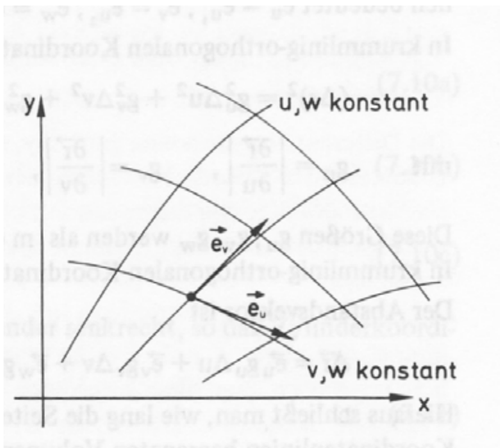
$$d^3r = dx\,dy\,dz = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\,du\,dv\,dw\;.$$

■ Ebene Polarkoordinaten $dx\,dy = dr\,r d\varphi$

10.2 Nabla-Operator in krummlinigen Koordinaten

Wir betrachten wieder den zweidimensionalen Fall (Verallgemeinerung auf drei Dimensionen ofensichtlich):

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \end{aligned}\right\}\; \underline{r} = \underline{r}(u,v)$$



Hält man v konstant und lässt u laufen, so zeigt die Ableitung $\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}$ in Richtung der Koordinatenlinie v = const; entsprechend ist $\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}$ tangential zu u = const.

Die normierten Tangentialvektoren sind $\underline{e}_u = \dfrac{\dfrac{\partial \underline{r}}{\partial u}}{\left|\dfrac{\partial \underline{r}}{\partial u}\right|}$, $\underline{e}_v = \dfrac{\dfrac{\partial \underline{r}}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right|}$.

Der Abstand zwischen zwei infinitesimal benachbarten Punkten $\underline{r}$ und $\underline{r}$ + d$\underline{r}$ mit den krummlinigen Koordinaten (u, v) und (u + du, v + dv) ergibt sich zu

$$d\underline{r} = \underline{r}(u+du, v+dv) - \underline{r}(u,v) = \underline{\underline{r}(u+du,v)-\underline{r}(u,v)} + \underline{r}(u+du,v+dv) - \underline{\underline{r}(u+du,v)} \cong$$

$$\cong \frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\,du + \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\,dv = \underline{e}_u \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\right| du + \underline{e}_v \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right| dv\ .$$

Die Länge von d$\underline{r}$, das sogenannte → Linienelement ist

$$(d\underline{r})^2 = g_{ij}\,du_i\,du_j \quad \text{mit dem metrischen Tensor } (\rightarrow \text{Metrik}) \quad g_{ij} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_j}\ .$$

Im Folgenden betrachten wir nur krummlinig-**orthogonale** Koordinaten, bei denen die Koordinatenlinien in jedem Punkt senkrecht aufeinander stehen, d.h.

$$\underline{e}_{u_i} \cdot \underline{e}_{u_j} = \delta_{ij}\,,\ \ g_{ij} = g_i^2\,\delta_{ij}\,.$$

Beispiele für krummlinig-orthogonale Koordinaten sind in 2D ebene Polarkoordinaten, in 3D sphärische Koordinaten. Im von uns betrachteten allgemeinen ebenen Fall ist dann

$(d\underline{r})^2 = g_u^2\,(du)^2 + g_v^2\,(dv)^2$ mit den → **metrischen Koeffizienten** $g_u =: \left|\dfrac{\partial \underline{r}}{\partial u}\right|$ und $g_v =: \left|\dfrac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right|$.

Zur Bestimmung der Komponenten des Nabla-Operators gehen wir von der koordinaten-unabhängigen Definition des Gradienten $d\phi(\underline{r}) = \mathrm{grad}\,\phi(\underline{r}) \cdot d\underline{r}$ aus. Wählt man d$\underline{r}$ entlang der einzelnen Koordinatenlinien, folgt

$$(\mathrm{grad}\,\phi)_u = \underline{e}_u \cdot \mathrm{grad}\,\phi = \frac{1}{g_u}\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \cdot \mathrm{grad}\,\phi = \frac{1}{g_u}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial \phi}{\partial z}}_{\text{entfällt in 2D}}\right) = \frac{1}{g_u}\frac{\partial \phi}{\partial u}$$

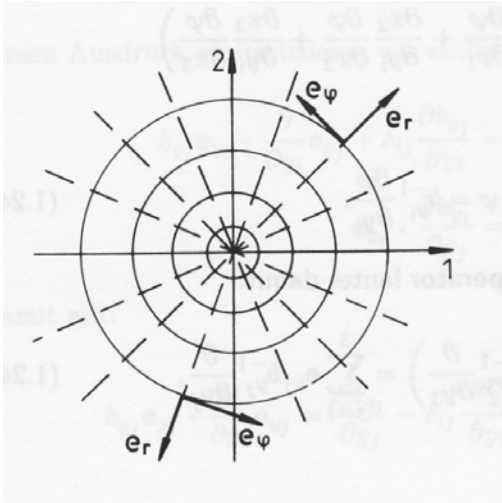
usw. Zusammengefasst hat $\mathrm{grad}\,\phi$ in krummlinig-orthogonalen Koordinaten nicht die

Komponenten $\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \underbrace{\frac{\partial}{\partial w}}_{\text{im 3D Fall}}\right)$ sondern

$$\underline{\nabla} = \left(\frac{1}{g_u}\frac{\partial}{\partial u}, \frac{1}{g_v}\frac{\partial}{\partial v}, \underbrace{\frac{1}{g_w}\frac{\partial}{\partial w}}_{\text{im 3D Fall}}\right).$$

In ähnlicher Weise werden die Differentialoperatoren div, rot und der Laplace-Operator in krummlinig orthogonalen Koordinaten bestimmt. Die sich ergebenden Ausdrücke findet man z.B. in Großmann, Kap. 7.2. Wir werden vor allem die Ergebnisse für ebene Kugelkoordinaten sowie für Zylinder- und Kugelkoordinaten benötigen.

10.2 Ebene Polarkoordinaten



Transformation:

$x = r \cos\varphi$

$y = r \sin\varphi$

Koordinatenlinien

$r = \text{const} \;\rightarrow\;$ konzentrische Kreise

$\varphi = \text{const} \rightarrow$ Geraden durch den Ursprung

Basis

- rein geometrisch

$\underline{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \; \underline{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$ (nicht ortsfest !)

- "ausführlich"

$$\underline{e}_\varphi = \frac{\dfrac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi}}{\left|\dfrac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi}\right|} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial (x\,\underline{e}_x + y\,\underline{e}_y)}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial (r\cos\varphi\,\underline{e}_x + r\sin\varphi\,\underline{e}_y)}{\partial \varphi} = -r(\sin\varphi\,\underline{e}_x + \cos\varphi\,\underline{e}_y) = r\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \\ \left|\dfrac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi}\right| = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = r \end{array} \right\} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Analog $\underline{e}_r = \dfrac{\partial \underline{r}}{\partial r}\left|\dfrac{\partial \underline{r}}{\partial r}\right|^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$

$\underline{e}_r \cdot \underline{e}_\varphi = -\cos\varphi\sin\varphi + \cos\varphi\sin\varphi = 0 \;\rightarrow\;$ ebene Polarkoord. sind krummlinig-orthogonal

Funktionaldeterminante: $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi - (-r\sin^2\varphi) = r$

Flächenelement: $dx\,dy = r\,dr\,d\varphi$

metrische Koeffizienten: $g_r = 1$, $g_\varphi = r$

Nabla: $\underline{\nabla} = \underline{e}_r \dfrac{\partial}{\partial r} + \underline{e}_\varphi \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}$