10.4 Sphärische Koordinaten

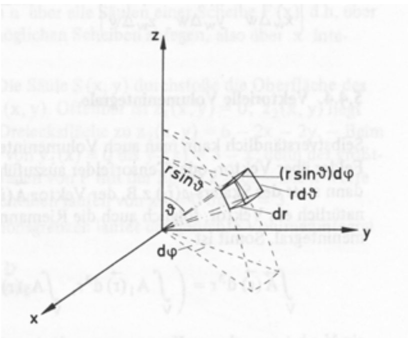
Motivation: Zentralsymmetrische Felder spielen wichtige Rolle in der Physik. Zwei Beispiele:

(i) Zwei-Körper-Problem: Bewegung zweier ausschließlich abstandsabhängig wechselwirkender Massen oder Ladungen bei $\underline{r}_1$ und $\underline{r}_2$ (ohne äußeres Feld) ist auf eine eindimensionale Bewegung zurückführbar → Lagrange-Formalismus (→ kommendes Semester)

$$L(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2) = T - U = ... = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 - U(r)\right) \underset{L=mr^2\dot{\varphi}}{=} \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2} - U(r)}_{U_{eff}}$$

(ii) H-Atom: $\hat{H}\psi = E\psi$, $\hat{H} = \frac{(-i\hbar\underline{\nabla})^2}{2m} + U(r)$ wird in sphärischen Koordinaten benötigt.

Transformation:



$$x = r\,\sin\vartheta\cos\varphi$$
$$y = r\,\sin\vartheta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\vartheta$$

Koordinatenlinien

φ, ϑ = const → vom Ursprung ausgehende Strahlen: $0 \le r < \infty$,

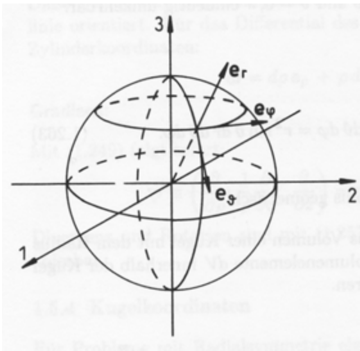
r, ϑ = const → zur x-y-Ebene parallele Kreise mit Zentrum auf der z-Achse: $0 \le \varphi \le 2\pi$,

r, φ =const → Halbkreis mit Zentrum im Ursprung durch z-Achse berandet: $0 \le \vartheta \le \pi$.

Beachte: Kugelkoordinaten → r- Abstand vom Koordinatenursprung

Zylinderkoordinaten → r- Abstand von der z-Achse

Basis



$$\underline{e}_r = \frac{\frac{\partial \underline{r}}{\partial r}}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial r}\right|} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_\vartheta = \frac{\frac{\partial \underline{r}}{\partial \vartheta}}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial \vartheta}\right|} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi}}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi}\right|} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ Einheitsvektoren φ, ϑ -abhängig (also nicht ortsfest), aber orthogonal.

Funktionaldeterminante:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi\\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi\\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0\end{vmatrix}=$$

$$=r^2\sin^2\vartheta\,\sin\vartheta\,\cos^2\varphi+r^2\sin^3\vartheta\,\sin^2\varphi+r^2\cos^2\vartheta\,\sin\vartheta\,\sin^2\varphi+r^2\sin^3\vartheta\,\cos^2\varphi=r^2\sin\vartheta$$

Volumenelement: $d^3r = dx\,dy\,dz = r^2\sin\vartheta\;dr\,d\vartheta\,d\varphi$

geometrisch: $d^3r = dr\;r d\vartheta\;(r\sin\vartheta)\,d\varphi$

Def.: **Raumwinkelelement** $d\Omega = \sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi \quad d^3r = dr\;r^2\,d\Omega$

$d\Omega = \dfrac{\text{Flächenelement}}{\text{Radius}^2}$ als Verallgemeinerung von $d\varphi = \dfrac{\text{Bogenelement}}{\text{Radius}}$

Addition aller Raumwinkelelemente ergibt

$$\int d\Omega=\int_0^\pi \sin\vartheta\,d\vartheta\int_0^{2\pi}d\varphi=(-\cos\vartheta)\Big|_0^\pi\cdot 2\pi=4\pi=\frac{4\pi R^2}{R^2}=\frac{\text{Kugeloberfläche}}{\text{Radius}^2}.$$

■ Kugelvolumen (Radius R)

$$V=\int_V d^3r=\int_0^R dr\,r^2\int d\Omega=\int_0^R \underbrace{4\pi r^2\,dr}_{\substack{\text{infin. dünne Kugel-}\\ \text{schicht der Dicke } dr}}=4\pi\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^R=\frac{4\pi}{3}R^3 \quad \left(\text{statt } V=\int_V d^3r=\int^{x^2+y^2+z^2=R^2} dx\int dy\int dz\right)$$

<u>metrische Koeffizienten:</u> $g_r = 1,\; g_\vartheta = r,\; g_\varphi = r\sin\vartheta \quad \rightarrow$

<u>Nabla-Operator:</u> $\underline{\nabla} = \underline{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \underline{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \underline{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi}$

Bem.: Da EHV φ, ϑ -abhängig, müssen sie stets links von den Differentiationen stehen.

■ Gradient eines kugelsymmetrischen Skalarfelds: $\operatorname{grad}\phi(r) = \underline{\nabla}\,\phi(r) = \frac{\partial\phi(r)}{\partial r}\,\underline{e}_r = \phi'(r)\frac{\underline{r}}{r}$

umständlicher:

$$\operatorname{grad}\phi(r) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\underline{e}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\underline{e}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\underline{e}_z = \frac{d\phi}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}\underline{e}_x + \ldots = \frac{d\phi}{dr}\frac{x}{r}\underline{e}_x + \ldots = \frac{d\phi}{dr}\left(\frac{x}{r}\underline{e}_x + \frac{y}{r}\underline{e}_y + \frac{z}{r}\underline{e}_z\right) = \phi'(r)\frac{\underline{r}}{r}$$

<u>Laplace-Operator:</u>

$$\Delta = \underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla} = (\ldots)\cdot(\ldots) = \ldots \text{Produktregel ergibt} \ldots = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}}_{\text{Radialanteil}} + \underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \frac{\cos\vartheta}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial^2\varphi}}_{\text{Winkelanteil}}$$

kompakt: $$\Delta\phi(\underline{r}) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\phi}{\partial^2\varphi}$$

■ Radialanteil eines kugelsymmetrischen Skalarfelds $$\Delta\phi(r) = \begin{cases} \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\phi)}{\partial r^2} \\ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) \end{cases}$$

Man überprüft z.B. leicht $$\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\phi)}{\partial r^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial(r\phi)}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\phi + r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial\phi}{\partial r} + r\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}\right) = \frac{2}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}$$

11. Intergrale

… als Summe über geeignet gewählte infinitesimale Beiträge …

11.1 Zur Erinnerung

<u>Geometrische Interpretation</u> des bestimmten Riemann-Integrals:

$\int_a^b dx\, f(x)$ $\rightarrow$ Fläche "unter" f(x) zwischen a und b als Grenzwert $\Delta x \rightarrow 0$ der Summe $\sum f(x)\,\Delta x$ infinitesimal schmaler Streifen $f(x)\cdot\Delta x$.

<u>Integral als linearer Operator:</u> $\int dx\, [\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \int dx\, f(x) + \beta \int dx\, g(x)$

<u>Stammfunktion F(x):</u> $f(x) = \dfrac{d\,F(x)}{dx}$

<u>"Hauptsatz der Integralrechnung und Integralrechnung":</u> $\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a)$

<u>Integral als Funktion der oberen/unteren Grenze:</u>

$$\frac{d}{db}\left(\int_a^b dx\, f(x)\right) = f(b) \quad \frac{d}{da}\left(\int_a^b dx\, f(x)\right) = -f(a)\,.$$

<u>Uneigentliche Integrale:</u> $\int_a^\infty dx\, f(x) := \lim_{b\to\infty} \int_a^b dx\, f(x)$

- Gängige Integrationsmethoden wiederholen

→ <u>Variablensubstitution:</u> $\int_a^b dx\ f(x) \overset{x=x(t)}{=} \int_{t(a)}^{t(b)} dx\ f\big(x(t)\big)$

→ Partialbruchzerlegung

→ partielle Integration

■ $\int d\varphi\ \cos^2\varphi = \int d(\sin\varphi)\ \cos\varphi = \sin\varphi\ \cos\varphi - \int d\varphi\ \sin\varphi(-\sin\varphi) = \int d\varphi\ (1-\cos^2\varphi)$,

$2\int d\varphi\ \cos^2\varphi = \varphi,\ \int d\varphi\ \cos^2\varphi = \frac{\varphi}{2}.$

→ Differenzieren nach einem Parameter

■ $I = \int_0^\infty dx\, x\, e^{-x} = 1$ denn

$$I(a) = \int_0^\infty dx\, x\, e^{-ax} = -\frac{d}{da}\left(\int_0^\infty dx\ e^{-ax}\right) = -\frac{d}{da}\left(-\frac{1}{a}e^{-ax}\Big|_0^\infty\right) = -\frac{d}{da}\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a^2}$$

→ Integrale in symmetrischen Grenzen: $\int_{-a}^{a} dx\, f(x) = \begin{cases} 2\int_0^a dx\, f(x),\ \text{wenn } f(x) = f(-x) \text{ gerade} \\ 0,\ \text{wenn } f(x) = -f(-x) \text{ ungerade} \end{cases}$

11.2 Kurvenintegrale

Beispiele für Kurvenintegrale sind

→ die Arbeit bei gekrümmter Wegstrecke, $A = \int\limits_{1,C}^{2} d\underline{r} \cdot \underline{F}(\underline{r})$ (d.h. entlang einer Raumkurve C),

→ die Länge einer Kurve $L = \int\limits_{1,C}^{2} ds$ oder

→ die Bestimmung des Potenzials eines konservativen Kraftfelds $\underline{F}(\underline{r})$ aus $\phi(\underline{r}) = -\int d\underline{r} \cdot \underline{F}(\underline{r})$ (wegunabhängig).

Werden als Integranden nur Skalare und Vektoren zugelassen, sind folgende Typen von Kurvenintegralen denkbar:

$$\int\limits_{C} ds\, \phi(\underline{r}),\quad \int\limits_{C} ds\, \underline{A}(\underline{r}),\quad \int\limits_{C} d\underline{r} \cdot \underline{A}(\underline{r}),\quad \int\limits_{C} d\underline{r} \times \underline{A}(\underline{r}),\quad \int\limits_{C} d\underline{r} \times \phi(\underline{r})$$

<u>Vorgehensweise:</u> Unterteile C in Abschnitte der Länge $ds = |d\underline{r}|$, parametrisiere C durch Ortsvektoren $\underline{r}(t)$ (→ "Bahnkurve") mit Anfangs- und End"zeit" t_1 bzw. t_2, summiere über die infinitesimalen Beiträge

$$A = \int\limits_{1,C}^{2} d\underline{r} \cdot \underline{F}(\underline{r}) \underset{\uparrow}{=} \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{d\underline{r}}{dt} \cdot \underline{F}(\underline{r}(t)) = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\, \underline{v}(t) \cdot \underline{F}(\underline{r}(t))$$

- Gravitationspotenzial

Parametrisiere C durch Radialstrahl $\underline{r}(\lambda) = \lambda\, \underline{e}_r$

$$U(r) = -\int\limits_{C} d\underline{r} \cdot \underline{F}(\underline{r}) = +\gamma\, m M \int\limits_{\infty}^{r} \frac{d\lambda}{\lambda^2}\, \underline{e}_r \cdot \underline{e}_r = -\gamma\, m M \left. \frac{1}{\lambda} \right|_{\infty}^{r} = -\gamma\, \frac{mM}{r} \quad \text{(anziehend !)}$$

→ potenzielle Energie von m im Punkt $\underline{r}$ ist gleich der zu verrichteten Arbeit, um m gegen das von M erzeugte Gravitationsfeld aus dem Unendlichen beginnend in $\underline{r}$ zu positionieren.

Bei der Integration Symmetrien ausnutzen:

■ $\underline{E}$-Feld $\underline{E} = \alpha(-y, x, 0)$

Entlang eines kreisförmigen Weges (Radius des Kreises R) um die z-Achse gilt

- $\oint_c d\underline{r} \times \underline{E}(\underline{r}) = 0$, weil nur Beiträge gleich Null addiert werden.

- $\oint_c d\underline{r} \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \oint_c ds\, E(\underline{r}) = E(R) \oint_c ds = \alpha R\ 2\pi R = \alpha\ 2\pi R^2$

11.3 Ebene Flächenintegrale

$$\int_F \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Flächen} \\ \text{element}}}{d^2 r}\ \phi(x,y) = \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\ \phi(x,y)}_{\text{Streifen } (x,\, x+dx)}$$

■ Die Masse pro Fläche einer ebenen Galaxie nehme exponentiell vom Zentrum weg entsprechend $\rho(x,y) = \rho_0 \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)$ ab. Um die Gesamtmasse M der Galaxie zu bestimmen, sind ebene Polarkoordinaten am geeignetsten

$$M = \int_F d^2 r\ \rho(x,y) = \rho_0 \int_F d^2 r\ \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{a^2}\right) = \left[\ \rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)\ \right] =$$

$$\underset{\substack{x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi}}{=} \rho_0 \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \underbrace{\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}}_{r} e^{-\frac{r^2}{a^2}} = 2\pi\rho_0 \int_0^{\infty} dr\, r\, e^{-\frac{r^2}{a^2}} = 2\pi a^2 \rho_0 \int_0^{\infty} dz\, z\, e^{-z^2} =$$

$$= 2\pi a^2 \rho_0 \int_0^{\infty} dz \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{d}{dz}\left(e^{-z^2}\right) = 2\pi a^2 \rho_0 \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-z^2}\Big|_0^{\infty} = \pi a^2 \rho_0\ .$$

Bem.: Nützlich ist die in diesem Zusammenhang erkannte Beziehung

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \quad \text{denn} \quad I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy\ e^{-(x^2+y^2)} = 2\pi \int_0^{\infty} dr\ r\ e^{-r^2} = -\pi e^{-r^2}\Big|_0^{\infty} = \pi\ .$$

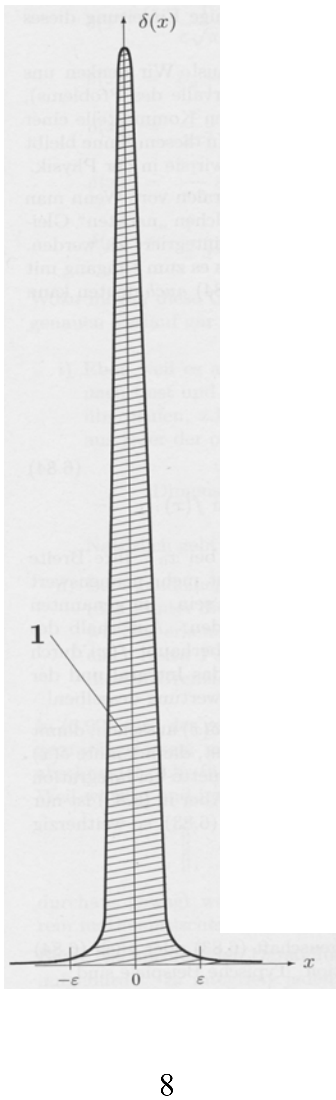
11.4 Oberflächenintegrale

11.5 Volumenintegrale

11.6 Dirac'sche Delta-Funktion

Motivation/Beispiel: Ziehe eine Masse oder eine Ladung auf eine Fläche, Kurve oder einen Punkt zusammen, die keine Fläche, Kurve oder Punkt im mathematischen Sinne sind. Wie kann man die Massendichte bzw. die Ladungsdichte aufschreiben.

<u>Anschauliche Definition:</u> Betrachte eine "Funktion" $\delta(x)$ mit positiver Fläche A, welche bei x = 0 auf ein (- ε, ε) – Intervall lokalisiert ist, wobei $A = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \delta(x) = 1$ ist.



Def.: definierende Eigenschaft

$\int dx\ \delta(x - x_0)\ f(x) = f(x_0)$ vorausgesetzt, x = x_0 gehört zum Integrationsbereich

→ sehr hilfreich bei der Auswertung von Integralen.

Bemerkung: Diese Definition kann mit $d_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & -\frac{\varepsilon}{2} < x < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ als

abkürzende Schreibweise für die Faltung

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ d_\varepsilon(x - x_0)\ f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x_0 - \frac{\varepsilon}{2}}^{x_0 + \frac{\varepsilon}{2}} dx\ f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Mittelwertsatz der} \\ \text{Intergralrechnung}}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} f(\tilde{x}) \cdot \varepsilon \underset{\substack{\uparrow \\ f(x)\,\text{stetig}}}{=} f(x_0)$$

aufgefasst werden.

■ Beispiele

(i) Ladungsdichte einer beweglichen "Punktladung q" am Ort $\underline{r}(t)$: $\rho_e(\underline{r},t) = q\,\delta(\underline{r} - \underline{r}(t))$

(ii) Massendichte der "flachen" Galaxie im obigen Beispiel: $\rho_m(\underline{r}) = \rho(x,y)\;\delta(z)$

(iii) Ladungsdichte einer Hohlkugel (Q, R) in Kugelkoordinaten

$$\rho_e(\underline{r}) = \frac{Q}{4\pi R^2}\;\delta(r-R)$$

$$\left(\text{damit} \int_V d^3r\;\rho_e(\underline{r}) = \int_0^\infty 4\pi r^2\,dr\;\frac{Q}{4\pi R^2}\;\delta(r-R) = \frac{Q}{R^2}\int_0^\infty r^2\,dr\;\delta(r-R) = Q\right)$$

- Viele Darstellungen der δ-"Funktion" durch glatte Funktionen

($\rightarrow$ zeichne $\delta(x)$ und überprüfe $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\;\delta(x) = 1$)

(i) $$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\,\pi}\,e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}}$$ Gauss-Verteilung mit Varianz/Breite $\varepsilon \rightarrow 0$

$$I = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\;e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}} = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dz\;\varepsilon\;e^{-z^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = 1$$

(ii) $$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\;, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

(iii) Theorie der Fourier-Transformation: Für stetige und quadratisch integrable f(x)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk\,g(k)\;e^{ikx}\;,\quad g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,f(x)\;e^{-ikx} \quad \text{also}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx_0\,f(x_0)\int_{-\infty}^{\infty} dk\,e^{-ik(x-x_0)}\;,\ \text{bzw.}\ \delta(x-x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\,e^{-ik(x-x_0)}$$

- **Nützliche Eigenschaften**

$\rightarrow\ \delta(x) = \delta(-x)\ ,\ \ \delta(a\,x) = \dfrac{1}{|a|}\delta(x)\ ,\quad f(x)\,\delta(x) = f(0)\,\delta(x),\ $ z.B. $x\,\delta(x) = 0$

$\rightarrow\ \delta(f(x)) = \sum_n \dfrac{1}{\left|f'(x)\big|_{x_n}\right|}\delta(x - x_n)$, wobei x_n die Nullstellen von f(x)

■ $\delta(x^2 - a^2) = \dfrac{1}{2|a|}\left[\delta(x-a) + \delta(x+a)\right]$

$\rightarrow\ \int dx\ \delta(x-a)\ \delta(x-b) = \delta(a-b)$

$\rightarrow$ (Def.) $\delta(\underline{r}) = \delta(x)\ \delta(y)\ \delta(z)\ ,\ \int d^3r\,\delta(\underline{r}) = 1,\ $ bzw. $\int_V d^3r\ \delta(\underline{r} - \underline{r}_0) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \underline{r}_0 \text{ in V} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

bzw.: $\int_V d^3r\ \delta(\underline{r} - \underline{r}_0)\,f(\underline{r}) = f(\underline{r}_0)$ für beliebige stetige und integrierbare f($\underline{r}$) sowie $\underline{r}_0 \in$ V.

- **Stufenfunktion** (θ - Funktion)

Im Zusammenhang mit der δ - Funktion führen wir die sogenannte θ - Funktion ein:

Def.: $\int_{-\infty}^{x} dt\ \delta(t) =: \theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases},\quad \dfrac{d\,\theta(x)}{dx} = \delta(x)$

Darstellungen der θ - Funktion ergeben sich aus denen für die δ - Funktion

■ z.B. $\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{\pi}\arctan\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)\right] \rightarrow \theta(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\arctan\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right),\quad \varepsilon \rightarrow 0$