Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Clive Emary

11. Übungsblatt – Theoretische Festkörperphysik I,II

Abgabe: Fr. 09.07.2010 bis 12:00 Uhr, EW705.
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 27 (10 Punkte): *1d-Ising-Modell*

Das Ising-Modell liefert eine idealisierte Beschreibung eines Ferromagneten. Für jeden Gitterpunkt i ist eine Variable s_i definiert, die die beiden Werte $s_i = \pm 1$ annehmen kann. Ferner wird eine Wechselwirkung zwischen den Gitterpunken i und j eingeführt. Ein solches System mit einem äußeren Magnetfeld hat die Hamilton-Funktion

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - \mu B_0 \sum_i s_i.$$

Die magnetische Induktion $\mathbf{B_0} = (0, 0, B_0)$ definiert die z-Richtung, relativ zu der sich die Momente parallel oder antiparallel ausrichten.
Betrachten Sie ein eindimensionales Ising-Modell, bei der sich eine Wechselwirkung nur auf die unmittelbar benachbarten Spins beschränkt, so dass sich eine Zustandssumme

$$\mathcal{Z} = \sum_{s_1,\ldots s_N = \pm 1} \exp\left(\sum_{i=1}^{N} (h s_i + K s_i s_{i+1}) \right)$$

ergibt. Hierbei ist $h = \beta \mu B_0$ und $K = \beta J$. Es werden periodische Randbedingungen angenommen, d.h. $s_{N+1} = s_1$.

1. Zeigen Sie, dass $\mathcal{Z}$ die folgende Bedingung erfüllt $\mathcal{Z} = \mathrm{Tr}\left\{T^N\right\}$, wenn die Matrix T gegeben ist durch

$$T = \begin{pmatrix} e^{h+K} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{-h+K} \end{pmatrix}.$$

   Hinweis:
   Das Argument der Exponentialfunktion läßt sich schreiben als $h(s_i + s_{i+1})/2 + K s_i s_{i+1}$

2. Zeigen Sie dass $\mathcal{Z}$ geschrieben werden kann als

$$\mathcal{Z} = \lambda_+^N + \lambda_-^N,$$

   wobei $\lambda_+ > \lambda_-$ die Eigenwerte der Matrix T sind.

3. Berechenen Sie diese Eigenwerte und zeigen Sie, dass im thermodynamischen Limes $N \to \infty$

$$\frac{\ln \mathcal{Z}}{N} = \ln \lambda_+ = K + \ln\left(\cosh(h) + (\sinh^2(h) + e^{-4K})^{\frac{1}{2}} \right)$$

   gilt. Diese Methode zur Bestimmung der Zustandssumme heißt Transfer-Matrix methode.

4. Bestimmen Sie die mittlere Magnetisierung und zeigen Sie, dass die Magnetisierung für $h \to 0^+$ verschwindet.

Bitte Rückseite beachten!$\longrightarrow$

11. Übung TFP SS10

Aufgabe 28 (10 Punkte): *Spin waves in a ferromagnet*
The quantum Heisenberg ferromagnet is specified by the Hamiltonian

$$H = -J \sum_{<n,m>} \mathbf{S}_n \cdot \mathbf{S}_m \tag{1}$$

with $J > 0$. We consider here a one-dimensional system with periodic boundary conditions.

1. The Holstein-Primakoff representation of the angular-momentum algebra reads

$$S^z_m = b^\dagger_m b_m - S; \quad S^+_m = b^\dagger_m \sqrt{2S - b^\dagger_m b_m}; \quad S^-_m = \sqrt{2S - b^\dagger_m b_m}\; b_m,$$

   where b_m and $b^\dagger_M$ are bosonic annihilation/creation operators: $\left[b_n, b^\dagger_m\right] = \delta_{nm}$. Show that the Holstein-Primakoff forms satisfy the appropriate spin commutation relations.

2. Rewrite the Hamiltonian of Eq. (1) in terms of these bosonic operators and show that, in the large spin limit $S \gg 1$, H can be approximated as

$$H = -J \sum_m \left[S^2 - 2S b^\dagger_m b_m + S(b^\dagger_m b_{m+1} + b^\dagger_{m+1} b_m) + \mathrm{O}(S^0) \right].$$

3. Through the introduction of the Fourier representation of the creation and annihilation operators, diagonalise this approximate Hamiltonian and determine the dispersion relation of the excitations (spin waves).

Aufgabe 29 (10 Punkte): BONUS: *Spin waves in an antiferromagnet*
The Heisenberg antiferromagnet Hamiltonian reads

$$H = +J \sum_{<n,m>} \mathbf{S}_n \cdot \mathbf{S}_m, \tag{2}$$

with $J > 0$. The ground state is the Neél state which, in 1D, is a chain of spins with alternating directions.

1. Perform a canonical transformation that rotates the odd-numbered spins by π around the x-axis.

2. As above, use the Holstein-Primakoff representation to obtain an effective bosonic Hamiltonian valid in the large spin limit.

3. Diagonalise this Hamiltonian and find the dispersion of spin-waves in a Heisenberg antiferromagnet. Hint: You will need not only a Fourier transform, but also a Bogolioubov one (cf. theory of superconductors)!