Kommutator des Besetzungszahloperators

June 4, 2010

Im Folgenden sollen die Kommutatoren des Besetzungszahloperators mit beliebigen Potenzen der Leiteroperatoren gezeigt werden:

$$[\hat{N}, (\hat{b}^\dagger)^n] \text{ und } [\hat{N}, \hat{b}^n]. \tag{1}$$

Dazu schauen wir uns ein paar Fälle an:

$$n = 0: \qquad [\hat{N}, (\hat{b}^\dagger)^0] = [\hat{N}, \hat{1}] = 0 = 0(\hat{b}^\dagger)^0, \tag{2}$$

$$n = 1: \qquad [\hat{N}, \hat{b}^\dagger] = -[\hat{b}^\dagger, \hat{N}] = -[\hat{b}^\dagger, \hat{b}^\dagger]\hat{b} - \hat{b}^\dagger[\hat{b}^\dagger, \hat{b}] = \hat{b}^\dagger, \tag{3}$$

$$n = 2: \qquad [\hat{N}, (\hat{b}^\dagger)^2] = [\hat{N}, \hat{b}^\dagger]\hat{b}^\dagger + \hat{b}^\dagger[\hat{N}, \hat{b}^\dagger] = \hat{b}^\dagger\hat{b}^\dagger + \hat{b}^\dagger\hat{b}^\dagger = 2(\hat{b}^\dagger)^2. \tag{4}$$

Dies legt nahe, dass $[\hat{N}, (\hat{b}^\dagger)^n] = n(\hat{b}^\dagger)^n$.

Wir beweisen diese Aussage nun durch vollständige Induktion: Der Induktionsanfang ist schon gezeigt. Wir nehmen also an, dass gilt: $[\hat{N}, (\hat{b}^\dagger)^n] = n(\hat{b}^\dagger)^n$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
[\hat{N}, (\hat{b}^\dagger)^{(n+1)}] &= [\hat{N}, (\hat{b}^\dagger)^n\hat{b}^\dagger] = [\hat{N}, (\hat{b}^\dagger)^n]\hat{b}^\dagger + (\hat{b}^\dagger)^n[\hat{N}, \hat{b}^\dagger] \\
&= n(\hat{b}^\dagger)^n\hat{b}^\dagger + (\hat{b}^\dagger)^n\hat{b}^\dagger = (n+1)(\hat{b}^\dagger)^{(n+1)},
\end{aligned} \tag{5}$$

womit die obige Aussage gezeigt ist.

Analog können wir zeigen: $[\hat{N}, \hat{b}^n] = -n\hat{b}^n$.