Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. S. Klapp,
Dipl. Phys Arash Azhand, Dipl. Phys. Ken Lichtner, Dipl. Phys. Philipp Zedler,
Tanja Schlemm, Jan Techter

12. April 2010

1. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik 2010

Abgabe: Di. 27.04.2010 8:30, in der Vorlesung (ausnahmsweise zusammen mit dem 2. Zettel)

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben, der Zettel wird sonst nicht korrigiert! Abgabe bitte in 3er Gruppen – keine Einzelabgabe.

Aufgabe 1 (8 Punkte): *δ-Distribution*

Die δ-Distribution ist durch ihre Wirkung auf Funktionen f definiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0). \tag{1}$$

Etwas vereinfacht wird das δ selbst oft als Funktion bezeichnet, was aber im strengen Sinne nicht möglich ist (eine solche Funktion müsste überall außer in der 0 verschwinden und in der 0 „irgendwie“ unendlich sein...). Tatsächlich kann man sie als **Grenzwert** einer **Funktionenschar** g_ϵ angegeben. Um zu überprüfen, dass eine solche Schar eine Darstellung der δ-Distribution ist, reicht es dann zu zeigen, dass im Grenzwert „unter dem Integral“ die Bedingung (1) erfüllt ist.
Es gibt mehrere Möglichkeiten, diese sogenannte „(Dirac-)δ-Funktion“ darzustellen. Eine davon soll in dieser Aufgabe näher betrachtet werden.

1. Zeige Sie, dass durch folgende Funktionenschar im Grenzwert $\epsilon \to 0$ eine Darstellung für die „δ-Funktion“ gegeben ist:
$$g_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$$
Tipp: Benutzen Sie die Substitution $y = \frac{x}{\epsilon}$. Grenzwertbildung und Integration dürfen, wo dies sinnvoll ist, vertauscht werden.

2. Zeigen Sie, dass für Funktionen f, die differenzierbar und außerhalb eines beschränkten Intervalles Null sind,
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = \int_{0}^{\infty} -f'(x) dx \tag{2}$$
gilt, (a) durch direktes Überprüfen der definierenden Gleichung (1) und (b) durch partielle Integration mit Hilfe der Darstellung durch die Schar g_ϵ.
Tipp: Benutzen Sie als Stammfunktion $G_\epsilon(x)$ von $g_\epsilon(x)$
$$\frac{\arctan(x/\epsilon)}{\pi} + \frac{1}{2}$$
und zeigen Sie, dass die Schar der Stammfunktionen $G_\epsilon(x)$ von g_ϵ fast überall[1] gegen die sogenannte „Heavyside“-Funktion
$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$
konvergiert (aus diesem Grunde wird diese Funktion dann auch als Stammfunktion der δ-Distribution bezeichnet).

Bitte Rückseite beachten! $\longrightarrow$

[1] „Fast überall“ bedeutet, dass die Schar nur in einzelnen, isolierten Punkten - hier nämlich in der Null - nicht entsprechend konvergiert. Für den Wert eines Integrals sind aber einzelne Punkte auf der x-Achse irrelevant. Achtung: Diese Aussage gilt bei „echten“ Funktionen (wie sie hier vorliegen: $H(x)$ und $f'(x)$) und wenn die Schar auch gegen eine Funktion konvergiert (die sich an einigen Punkten unterscheiden darf)!

Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. S. Klapp,
Dipl. Phys Arash Azhand, Dipl. Phys. Ken Lichtner, Dipl. Phys. Philipp Zedler,
Tanja Schlemm, Jan Techter

12. April 2010

Aufgabe 2 (12 Punkte): *Fouriertransformation*
Die Fourier-Transformation bildet eine grosse Klasse von Funktionen $f(x)$ auf andere Funktionen $g(k)$ ab. Sie bewirkt dabei einen Darstellungswechsel zwischen den Variablen x und k. Anschaulich kann man die Fourier-Transformation als eine Zerlegung der Funktion $f(x)$ in (ebene) Wellen ansehen, die Funktion $g(k)$ gibt dabei die Amplitude der zur Wellenzahl k gehörenden Welle an. Da ebene Wellen in vielen physikalischen Theorien einfache Lösungen der zugrundeliegenden Differentialgleichungen sind, findet die Fourier-Transformation zahlreiche Anwendungen. Die Definition der Fourier-Transformation ist:

$$\begin{aligned} g(k) &= FT(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\ f(x) &= FT^{-1}(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk \end{aligned}$$

1. Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion
$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Seien $\tilde{f}_1(k)$ und $\tilde{f}_2(k)$ die Fourier-Transformierten der Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$:
$$\tilde{f}_{1,2}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f_{1,2}(x) dx.$$
Wie lautet die Fourier–Transformierte $\tilde{g}(k)$ des Produktes $g(x) = f_1(x) f_2(x)$?

3. Berechnen Sie die Fourier–Transformierten der Funktionen
a) $f(x) = e^{-|x|}$, b) $f(x) = e^{-x^2/(\Delta x^2)}$.

4. Zeigen Sie, dass für jede quadratintegrable Funktion $f(x)$ die Beziehung (Parseval)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(k)|^2 dk$$
gültig ist.

Vorlesung:
- Dienstag 8:00 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203
- Mittwoch 8:00 Uhr – 10:00 Uhr im EW 201

Scheinkriterien:
- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Bestandene Klausur.
- Regelmässige und aktive Teilnahme in den Tutorien und einmal Vorrechnen.

Klausurtermin:
- Noch nicht bestimmt.

Sprechstunden:
- Prof. Dr. S. Klapp: Mi 11:15 – 12:00 Uhr (EW 707)
- Dipl. Phys. Arash Azhand: Do 11:15 – 12:00 Uhr (EW 627)
- Dipl. Phys. Ken Lichtner: Di 10:15 – 11:00 Uhr (EW 266)
- Dipl. Phys. Philipp Zedler: Fr 10:15 – 11:00 Uhr (EW 711)

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- Albert Messiah, Quantenmechanik Band 1 und 2, Walter de Gruyter, Berlin 1991
- W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 5/1 & 5/2 (Springer, 2002)
- Eugen Fick, Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie, 5. Auflage, Aula-Verlag, Wiesbaden 1984