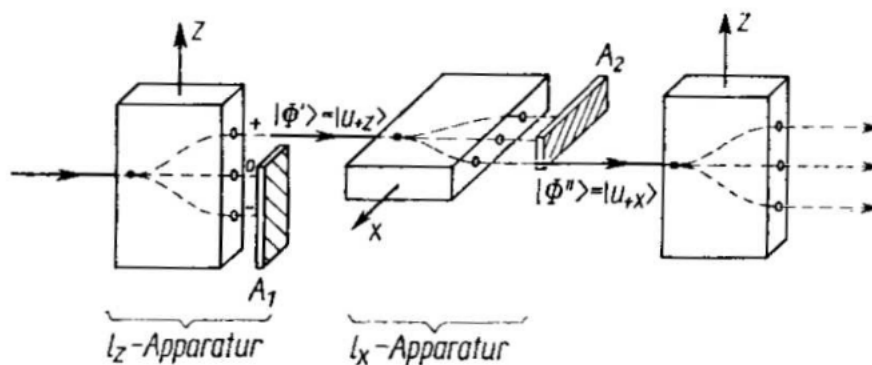


7. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik 2010

Abgabe: Di. 08.06.2010 8:30 Uhr, in der Vorlesung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben, der Zettel wird sonst nicht korrigiert! Abgabe bitte in 3er Gruppen – keine Einzelabgabe.

Aufgabe 17 (12 Punkte): Stern-Gerlach-Versuch.



In dieser Aufgabe betrachten wir die Messung von Bahndrehimpulsen. Sei die Bahndrehimpulsquantenzahl $l = 1$. Dies bedeutet, dass die magnetische Quantenzahl m die Werte $-1, 0, 1$ annehmen kann. In einem ONS, das aus Eigenvektoren der Operatoren \hat{L}^2 und \hat{L}_z besteht, werden dann die räumlichen Komponenten des Bahndrehimpulsoperators \hat{L}_x , \hat{L}_y und \hat{L}_z durch folgende Matrizen repräsentiert:

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{L}_y = \frac{\hbar}{2i} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{L}_z = \begin{pmatrix} \hbar & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar \end{pmatrix}$$

Mit $|u_{+z}\rangle$ bezeichnen wir den Eigenvektor von \hat{L}_z zum Eigenwert $+\hbar$, mit $|u_{0z}\rangle$ den Eigenvektor von \hat{L}_z zum Eigenwert 0 usw. (analog für die Operatoren \hat{L}_x und \hat{L}_y).

Berechnen Sie die Kommutatoren zwischen den einzelnen Komponenten des Drehimpulsoperators untereinander und mit $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$. Interpretieren Sie das Ergebnis bezüglich der Messung von den Komponenten des Bahndrehimpulsoperators.

Betrachten Sie die in der obigen Abb. dargestellten Messungen, wobei in der Abbildung \hat{L}_x mit l_x usw. bezeichnet werden. Mit Hilfe der ersten Apparatur wird die z -Komponente des Drehimpulses gemessen. Der Absorber A_1 bewirkt eine Präparation des Zustandes $|\varphi'\rangle = |u_{+z}\rangle$. Die zweite Apparatur misst die x -Komponente \hat{L}_x . Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die drei Messwerte von \hat{L}_x .

Der Absorber A_2 bewirkt nun ein Präparation des Zustandes $|\varphi''\rangle = |u_{+x}\rangle$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die drei Messwerte von \hat{L}_z bei der dritten Messung und interpretieren Sie das Ergebnis.

Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit für die Messwerte bei der letzten Messung, wenn der Absorber A_2 weggelassen wird. (Tipp: Berechnen Sie dabei aus den neun bedingten Wahrscheinlichkeiten die drei totalen Wahrscheinlichkeiten.)

Aufgabe 18 (8 Punkte): *Harmonischer Oszillator.*

Der eindimensionale harmonische Oszillator ist durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

charakterisiert.

- a) Begründen Sie die Bezeichnungen von \hat{b} und \hat{b}^\dagger als Erzeugungs- und Vernichtungsoperator. Berechnen Sie hierzu $\hat{N}\hat{b}^\dagger|n\rangle$ und deuten Sie das Ergebnis.
- b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion die Normierung in $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{b}^\dagger)^n|0\rangle$ und auch die folgenden Gleichungen:

$$\langle n+1|\hat{b}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}, \quad \langle n-1|\hat{b}|n\rangle = \sqrt{n}, \quad \langle n|m\rangle = \delta_{nm}.$$

- c) Bestimmen Sie die Unschärfen $\Delta\hat{x}|_n = (\langle n|\hat{x}^2|n\rangle - (\langle n|\hat{x}|n\rangle)^2)^{\frac{1}{2}}$ sowie $\Delta\hat{p}|_n$ im Formalismus der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren und diskutieren Sie $\Delta\hat{x}\Delta\hat{p}|_n$.

Vorlesung:	<ul style="list-style-type: none">• Dienstag 8:00 Uhr – 10:00 Uhr im EW 201• Mittwoch 8:00 Uhr – 10:00 Uhr im EW 201
Scheinkriterien:	<ul style="list-style-type: none">• Mindestens 50% der Übungspunkte.• Bestandene Klausur.• Regelmässige und aktive Teilnahme in den Tutorien und einmal Vorrechnen.
Klausurtermin:	<ul style="list-style-type: none">• 6. Juli, 7:30 in Raum H0105
Tutorien:	<ul style="list-style-type: none">• Di 10:00 – 12:00 Tanja Schlemm (EW 246)• Mi 12:00 – 14:00 Jan Techter (EW 731)• Mi 14:00 – 16:00 Carsten Weber (EW 246)• Do 8:00 – 10:00 Ken Lichtner (EW 229)• Do 10:00 – 12:00 Tanja Schlemm (EW 226)• Do 10:00 – 12:00 Philipp Zedler (EW 731)• Do 14:00 – 16:00 Jan Techter (EW 246)• Fr 10:00 – 12:00 Arash Azhand (EW 226)
Sprechstunden:	<ul style="list-style-type: none">• Prof. Dr. S. Klapp: Mi 11:15 – 12:00 Uhr (EW 707)• Dr. Carsten Weber: Do 15:15 – 16:00 Uhr (EW 710)• Dipl. Phys. Arash Azhand: Do 11:15 – 12:00 Uhr (EW 627)• Dipl. Phys. Ken Lichtner: Di 10:15 – 11:00 Uhr (EW 266)• Dipl. Phys. Philipp Zedler: Fr 10:15 – 11:00 Uhr (EW 711)• Tanja Schlemm: Mi 14:30 – 15:30 Uhr (vor der Bibl.)• Jan Techter: Mo 11:15 – 12:00 Uhr (EW 060)