

9. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik 2010

Abgabe: Di. 22.06.2010 8:30 Uhr, in der Vorlesung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben, der Zettel wird sonst nicht korrigiert! Abgabe bitte in 3er Gruppen – keine Einzelabgabe.

Aufgabe 21 (4 Punkte): Dynamik/Bilder in der Quantenmechanik

- (a) Der Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}_D(t, t')$ beschreibt die zeitliche Entwicklung von Zuständen im Dirac-Bild:

$$|\psi_D(t)\rangle = \hat{U}_D(t, t')|\psi_D(t')\rangle.$$

Stellen Sie $\hat{U}_D(t, t')$ mit Hilfe von $\hat{U}_0(t, t')$ und $\hat{U}(t, t')$ dar, wobei $\hat{U}_0(t, t')$ und $\hat{U}(t, t')$ die Zeitentwicklungsoperatoren zu \hat{H}_0 bzw. \hat{H} sind.

- (b) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung für die quantenmechanischen Erwartungswerte forminvariant sind, d.h. dass im Schrödinger-, Heisenberg- und Dirac-Bild gilt:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \hat{O} \rangle = \langle [\hat{O}, \hat{H}] \rangle + i\hbar \left\langle \frac{\partial \hat{O}}{\partial t} \right\rangle.$$

- (c) (Bonus +4) Berechnen Sie für den Hamiltonoperator ($\Omega \in \mathbb{R}$)

$$\hat{H} = \Omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

den Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(t, t_0) = e^{-i/\hbar \hat{H}(t-t_0)}$ mittels (a) einer Potenzreihe und

- (b) Diagonalisierung von \hat{H} . Berechnen Sie für den Anfangszustand $|\psi(t_0)\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_L \\ \alpha_R \end{pmatrix}$ ($\alpha_L, \alpha_R \in \mathbb{C}$) die Zeitdynamik $|\psi(t \geq t_0)\rangle$ und diskutieren Sie das Ergebnis. Betrachten sie den Spezialfall $\alpha_L = 1, \alpha_R = 0$.

Aufgabe 22 (4 Punkte): Kugelflächenfunktionen

Die Eigenfunktionen der Bahndrehimpulsoperatoren $\hat{\mathbf{L}}^2$ und \hat{L}_z in Ortsdarstellung sind gerade die Kugelflächenfunktionen

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

welche in der Vorlesung eingeführt wurden. Dabei sind $P_l^m(x)$ die zugeordneten Legendre-Polynome.

- (a) Zeigen Sie die Paritätssymmetrie $Y_{lm}(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-1)^l Y_{lm}(\theta, \varphi)$.
- (b) Visualisieren Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte der s($l = 0$)- sowie der drei p($l = 1$)-Orbitale mit einem Plot-Programm (z.B. Mathematica, Maple).
 Hinweis: In Mathematica lautet der Plot-Befehl `SphericalPlot3D` und die Kugelflächenfunktionen `SphericalHarmonicsY`.

Aufgabe 23 (12 Punkte): Drehimpulsalgebra

- (a) Berechnen Sie die Kommutatoren $[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_\pm]$ und $[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm]$, wobei $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$ die in der Vorlesung eingeführten Leiteroperatoren sind.
- (b) Zeigen Sie:

$$\hat{L}_\pm |lm\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)} |lm\pm 1\rangle.$$

- (c) Ein System befinde sich im gemeinsamen Eigenzustand $|lm\rangle$ der Bahndrehimpulsoperatoren \hat{L}_z und $\hat{\mathbf{L}}^2$. Zeigen Sie, dass die kleinste Streuung für \hat{L}_x und \hat{L}_y erreicht wird, wenn $|m| = l$ gilt. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:
- (1) Beweisen Sie zunächst: $\langle lm|\hat{L}_i|lm\rangle = 0$ für $i = x, y$.
 - (2) Berechnen Sie die Streuung $\langle lm|(\hat{L}_i - \langle \hat{L}_i \rangle)^2|lm\rangle$ für $i = x, y, z$. Warum ist $\langle lm|(\hat{L}_z - \langle \hat{L}_z \rangle)^2|lm\rangle = 0$?
 - (3) Zeigen Sie nun, dass die kleinste Streuung für \hat{L}_x und \hat{L}_y erreicht wird, wenn $|m| = l$ ist.

Vorlesung:	<ul style="list-style-type: none"> • Dienstag 8:00 Uhr – 10:00 Uhr im EW 201 • Mittwoch 8:00 Uhr – 10:00 Uhr im EW 201
Scheinkriterien:	<ul style="list-style-type: none"> • Mindestens 50% der Übungspunkte. • Bestandene Klausur. • Regelmässige und aktive Teilnahme in den Tutorien und einmal Vorrechnen.
Klausurtermin:	<ul style="list-style-type: none"> • 6. Juli, 7:30 in Raum H0105
Tutorien:	<ul style="list-style-type: none"> • Di 10:00 – 12:00 Tanja Schlemm (EW 246) • Mi 12:00 – 14:00 Jan Techter (EW 731) • Mi 14:00 – 16:00 Carsten Weber (EW 246) • Do 8:00 – 10:00 Ken Lichtner (EW 229) • Do 10:00 – 12:00 Tanja Schlemm (EW 226) • Do 10:00 – 12:00 Philipp Zedler (EW 731) • Do 14:00 – 16:00 Jan Techter (EW 246) • Fr 10:00 – 12:00 Arash Azhand (EW 226)
Sprechstunden:	<ul style="list-style-type: none"> • Prof. Dr. S. Klapp: Mi 11:15 – 12:00 Uhr (EW 707) • Dr. Carsten Weber: Do 15:15 – 16:00 Uhr (EW 710) • Dipl. Phys. Arash Azhand: Do 11:15 – 12:00 Uhr (EW 627) • Dipl. Phys. Ken Lichtner: Di 10:15 – 11:00 Uhr (EW 266) • Dipl. Phys. Philipp Zedler: Fr 10:15 – 11:00 Uhr (EW 711) • Tanja Schlemm: Mi 14:30 – 15:30 Uhr (in dem Raum vor der Bibliothek.) • Jan Techter: Mo 11:15 – 12:00 Uhr (EW 060)