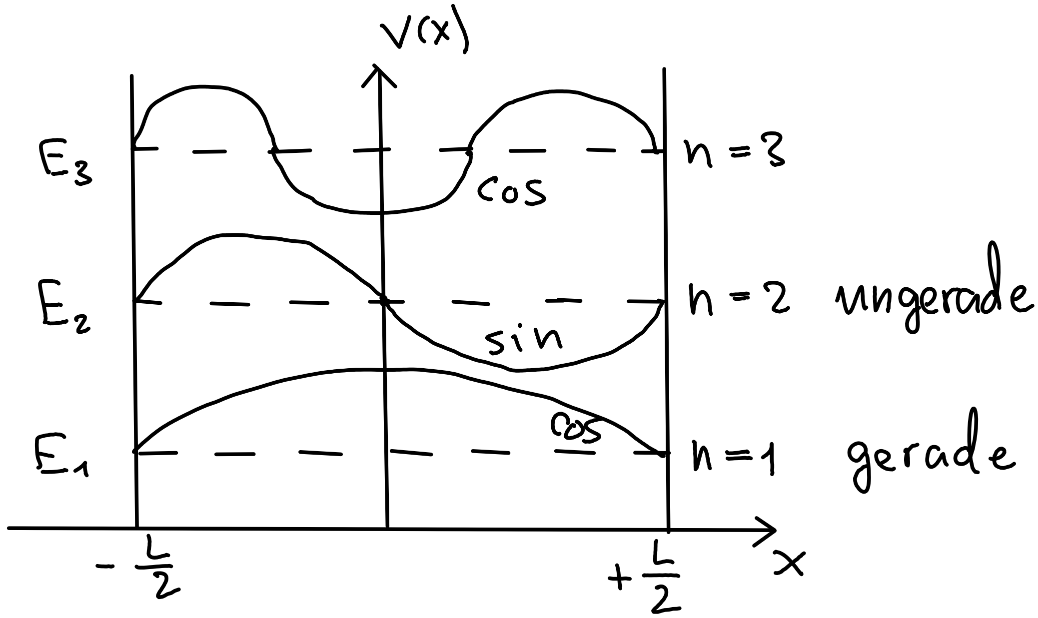
QM-Vorlesung vom 04.05.2010

Wiederholung (Unendlich hoher Potentialtopf):

Insgesamt:
Unendlich hoher Potentialtopf ist ein Beispiel für Systeme mit diskreten Energien und Eigenfunktionen definierter Parität

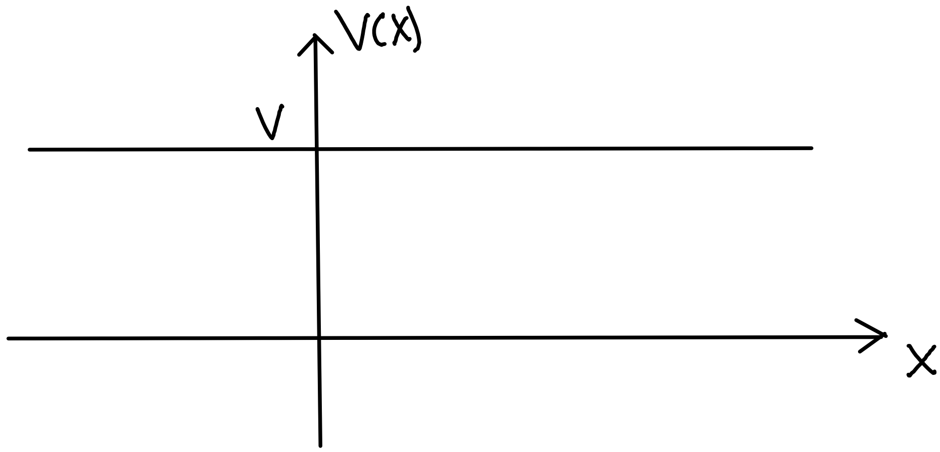
Wie schwingen de Saite in der Akustik!



Anwendungen: Beispiel für extrem anziehendes und kurzreichweitiges Potential, z.B. Kernkräfte (Protonen und Neutronen im Kern).

Beachte: Der Abstand zweier Energiewerte, d.h. zweier K-Werte ist $\Delta K = \frac{\pi}{L}$ → ΔK verschwindet für $L \to \infty$, d.h. für einen unendlich breiten Topf!

II.7.3. (Stückweise) konstantes Potential:



SG: $\quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi(x) = E\psi(x)$ Wie bei freien Teilchen, nur mit $E \to E-V$

$\Rightarrow \psi_\pm(x) = A_\pm e^{\pm\lambda x}$

mit $\hbar\lambda = \sqrt{-2m(E-V)}$

$\Rightarrow$ Fallunterscheidung notwendig!

a) $E > V \longrightarrow \lambda = ik$ mit $k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E-V)}$

Klassisch erlaubtes Gebiet, d.h. die Lösungen sind wieder ebene Wellen, die in positiver und negativer x-Richtung laufen.

$\longrightarrow$ "Oszillatorische Lösungen"

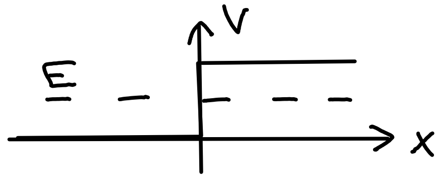
b) $E < V \Rightarrow \hbar\lambda$ ist reell!

$\hbar\lambda = +\sqrt{2m(V-E)}$

$\Rightarrow$ Klassisch verbotenes Gebiet, da dort die potentielle Energie kleiner als die Gesamtenergie sein muss!

In der QM gibt es trotzdem Lösungen → "Tunneleffekt"

<u>Beachte:</u> Diese Überlegung ist nur sinnvoll, falls nirgendwo $E > V$, z.B. bei der Potentialstufe

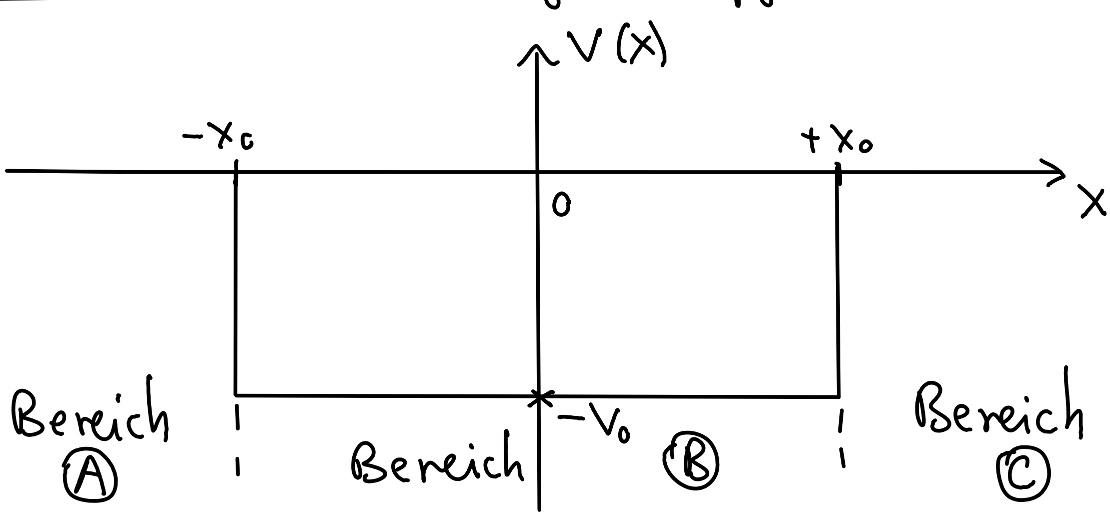


⇒ "Physikalische" Lösungen in der QM

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(x) = e^{-\lambda x} \\ \quad (x > 0) \\ \varphi(x) = e^{\lambda x} \\ \quad (x < 0) \end{array}\right\} \text{Verschwinden für } x \to \pm\infty$$

„exponentiell abklingend"

II.7.4. Endlich tiefer Topf:



$$V(x) = \begin{cases} -V_0, & |x| < x_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Diskutiere zwei Fälle:

a) $-V_0 < E < 0$ $\Rightarrow$ "gebundene Zustände"

b) $E > 0$ $\Rightarrow$ "Streuzustände"

a) Bereich Ⓑ $\rightarrow$ klassich erlaubtes Gebiet!

$$\Rightarrow \varphi(x) = B_+ e^{ikx} + B_- e^{-ikx}$$

mit $k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m\underbrace{(V_0 - |E|)}_{>0 \text{ in } Ⓑ}}$

Bereich Ⓐ $\rightarrow$ klassisch verboten!

$$\varphi(x) = A e^{\lambda x} \quad \text{mit } \hbar\lambda = \sqrt{2m|E|}$$

verschwindet für $x \rightarrow -\infty$!

Bereich Ⓒ $\rightarrow$ klassich verboten!

$$\varphi(x) = C e^{-\lambda x} \quad \text{mit } \hbar\lambda = \sqrt{2m|E|}$$

verschwindet für $x \rightarrow +\infty$!

Festlegung der Konstanten:

i) Fordere Stetigkeit von $\varphi(x)$ an den Nahtstellen (siehe Überlegungen beim unendlich tiefen Topf)

ii) fordere außerdem Stetigkeit von $\varphi'(x) = \frac{d\varphi}{dx}$

Grund für ii):

$$SG: \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi}{dx^2} = (E - V(x))\,\varphi(x)$$

Falls also $V(x)$ keine unendlich hohen Sprünge aufweist, ist φ'' integrierbar (endlich)

$\rightarrow$ $\varphi'(x)$ stetig!

(und φ stetig!)

Aus i) und ii):

$$\left.\begin{aligned} A e^{-\lambda x_0} &= B_+ e^{-ikx_0} + B_- e^{+ikx_0} \\ C e^{-\lambda x_0} &= B_+ e^{+ikx_0} + B_- e^{-ikx_0} \end{aligned}\right\} \text{aus i)}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda A e^{-\lambda x_0} &= ik\left(B_+ e^{-ikx_0} - B_- e^{+ikx_0}\right) \\ -C\lambda e^{\lambda x_0} &= ik\left(B_+ e^{+ikx_0} - B_- e^{-ikx_0}\right) \end{aligned}\right\} \text{aus ii)}$$

Vier Gleichungen mit vier Unbekannten!

Vereinfachung durch die Tatsache, dass $\hat{H}$ symmetrisch in x (da $V(x) = V(-x)$)

$\rightarrow$ Eigenfunktionen haben gerade oder ungerade Parität!

(Wie beim unendlich tiefen Topf!)

<u>Gerade Parität:</u> $\quad \varphi(x) = \varphi(-x)$

$$\Rightarrow A = C$$

$$B_+ = B_- = B$$

⇒ Stetigkeitsbedingungen:

$$A e^{-\lambda x_0} = 2B\cos(kx_0)$$

$$\lambda A e^{-\lambda x_0} = 2B\sin(kx_0)\cdot k$$

$$\Rightarrow \boxed{k\tan(kx_0) = \lambda} \quad (*)$$

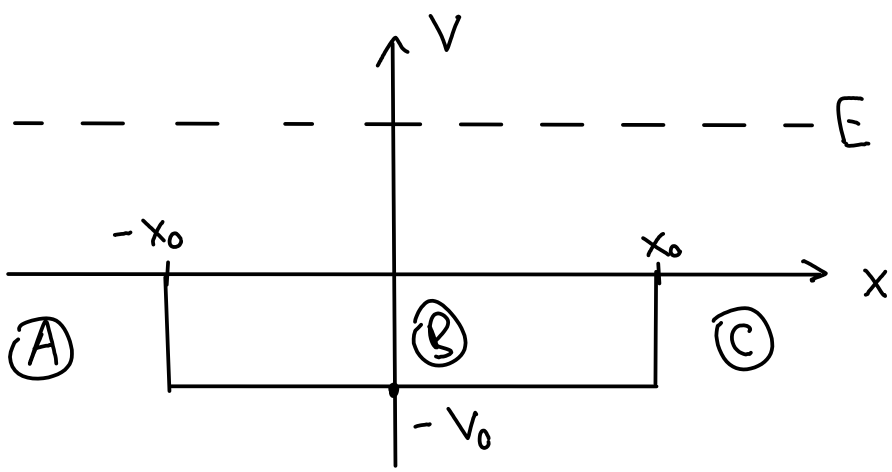
<u>Ungerade Parität:</u> $\psi(x) = -\psi(-x)$

$$\Rightarrow A = -C, \quad B_+ = -B_- = B$$

$$\Rightarrow \boxed{k\cot(kx_0) = \lambda} \quad (**)$$

Aus den transzendenten Gleichungen (*) und (**) ergeben sich die <u>diskreten</u> Energien der gebundenen Zustände!

b) Streuzustände beim endlich tiefen Topf



Klassisch kann das Teilchen zu beiden Seiten ins Unendliche laufen!

Quantenmechanisch:
Wellenfunktion überall oszillatorisch, wobei die Wellenlängen vom Bereich abhängen!

Ansätze:

Bereich Ⓐ: $\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_r(x)$

mit $\varphi_0(x) = e^{ik_0 x}$, $k_0 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}$

„einfallende Welle" (Amplitude wurde o.B.d.A. auf eins gesetzt!)

und $\varphi_r(x) = A e^{-ik_0 x}$ vom Potentialtopf „reflektierte Welle"

$\Rightarrow$ typisch quantenmechanisches Phänomen!
(klassisch würde man höchstens Abbremsung erwarten!)

Bereich Ⓑ: $\varphi(x) = B_+ e^{ikx} + B_- e^{-ikx}$

mit $k = \sqrt{2m(E+V_0)}$

Bereich Ⓒ: $\varphi(x) = C e^{ik_0 x} = \varphi_d(x)$

mit $k_0 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}$

durchgehende (transmittierte) Welle

Festlegung der Konstanten A_-, B_+, B_-, C wieder durch die Festlegung, dass $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ stetig sind!

Man findet:

Für jedes $E>0$ ergibt sich eine eindeutige Lösung (für die Koeffizienten)

$\rightarrow$ Eigenwertspektrum ist kontinuierlich!

Streuzustände werden häufig auch über die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsströme diskutiert.

Erinnerung (Kapitel II.3):

$$\underline{j}(\underline{r},t) = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*\right)$$ Stromdichte in der QM

Hier (Streuung am Potentialtopf)

- „einfallender Strom":

$$j_0 = \frac{\hbar}{2mi}\left(\varphi_0^* \frac{d\varphi_0}{dx} - \varphi_0 \frac{d\varphi_0^*}{dx}\right) \qquad \boxed{\varphi_0 = e^{ik_0x}}$$

$$= \frac{\hbar}{2mi}\left(e^{-ik_0x}(ik_0)e^{ik_0x} - e^{ik_0x}(-ik_0)e^{-ik_0x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad j_0 = \frac{\hbar k_0}{m}$$

- „reflektierter Strom":

$$j_r = \frac{\hbar}{2mi}\left(\varphi_r^* \frac{d\varphi_r}{dx} - \varphi_r \frac{d\varphi_r^*}{dx}\right) \qquad \boxed{\varphi_r = A_- e^{-ik_0x}}$$

$$= \dots = -\frac{\hbar k_0}{m}|A_-|^2$$

• „transmittierter (durchgehender) Strom":

$$j_d = \frac{\hbar k_0}{m} |C|^2$$

$$\boxed{\varphi_d = C e^{i k_0 x}}$$

Man definiert:

Transmissionskoeffizient:

$$T = \left| \frac{j_d}{j_e} \right|$$

Reflexionskoeffizient:

$$R = \left| \frac{j_r}{j_e} \right|$$

Beachte: Die Teilchenzahlerhaltung erfordert, dass:

$$\boxed{T + R = 1} \quad !!$$

Speziell für den Potentialtopf:

$$T = |C|^2 \quad , \quad R = |A_-|^2$$

Explizit (nach Lösung des Problems der Festlegung der Konstanten):

$$T = \frac{16 (k/k_0)^2}{\alpha^2} = T(E)$$

mit $\alpha = 16 \left(\frac{k}{k_0}\right)^2 + 4 \left(1 - \left(\frac{k}{k_0}\right)^2\right)^2 \sin^2(2 k x_0)$,

$$\frac{k}{k_0} = \sqrt{\frac{E + V_0}{E}}$$

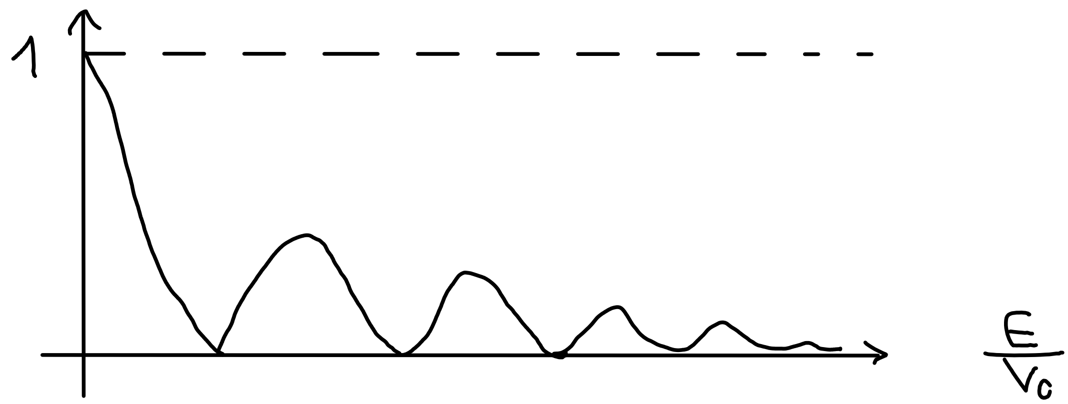
und

$$R = \frac{4\left(1-\left(\frac{k}{k_0}\right)^2\right)^2 \sin^2(2kx_0)}{\alpha^2} = 1 - T = R(E)$$

Das heißt also: $R \neq 0$!

$\hat{=}$ Teilchenwelle erleidet Reflexion am Potentialtopf!

Genauer: Oszillatorisches Verhalten als Funktion der Energie E



Qualitativ:

$$R = 0 \quad \text{für} \quad \sin(2kx_0) = 0$$

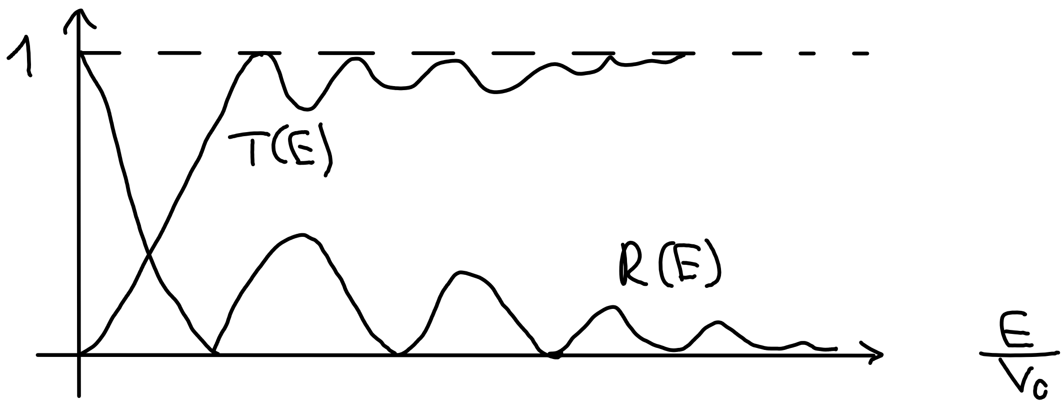
$$\Leftrightarrow 2kx_0 = n \cdot \pi \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow 2x_0 = n\frac{\lambda}{2}$$

→ Ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge

Wegen $R + T = 1$ gilt bei diesen Energien gleichzeitig:

$T = 1$! „Resonanzen"



Man sieht außerdem:

- $E \to 0$: $R \to 1$, $T \to 0$
- $\frac{E}{V_0} \to \infty \Rightarrow \frac{k}{k_0} = \sqrt{\frac{E+V_0}{E}} \approx 1$

$$\Rightarrow R \to 0 \ , \ T \to 1$$

-> Plausibel, da ein Teilchen mit sehr hoher Einfallsenergie den Topf kaum noch spürt!