Van der Pol Oszillator (VdP)

$$\ddot{x} + \varkappa(x^2 - a)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$y := \dot{x}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \varkappa(x^2 - a)y - \omega_0^2 x \end{aligned}}$$

Betrachte den Fall $a > 0$ (andere Fälle in HA)

Übergang zu dimensionslosen Einheiten

Allgemeiner Ansatz:

reskaliere Zeit: $\quad t = t_c\, s$ ← dimensionslos

reskaliere Variablen: $\quad x(t) = x_c\, X(s)$

$$y(t) = y_c\, \Psi(s)$$

- s, Ψ und X sind dimensionslos.
- Die charakteristischen Faktoren t_c, x_c, y_c tragen die Einheiten und werden später geeignet gewählt

Einsetzen in Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt}\left(x_c X(t/t_c)\right) = \frac{x_c}{t_c} X'(s)$$

$$= y_c \Psi(s)$$

$$\frac{d}{dt} y(t) = \frac{y_c}{t_c} \Psi'(s)$$

$$= k\left(x_c^2 X^2(s) - a\right) y_c \Psi(s) - \omega_0^2 X(s)$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} X'(s) &= \frac{y_c t_c}{x_c} \Psi(s) \\ \Psi'(s) &= t_c k x_c^2 \left(X^2(s) - \frac{a}{x_c^2}\right)\Psi(s) - \omega_0^2 \frac{x_c t_c}{y_c} X(s) \end{aligned}}$$

Wähle x_c, y_c und t_c so, dass die Gl. möglichst einfach werden:

$$\frac{y_c t_c}{x_c} = 1 \qquad \omega_0^2 \frac{x_c t_c}{y_c} = 1$$

$$\frac{a}{x_c^2} = 1 \leftarrow \text{geht weil wir } a > 0 \text{ betrachten}$$

Gl. für x_c, y_c und t_c.

Lsg:

$$x_c = \sqrt{a}$$

$$y_c = \sqrt{a}\,\omega_0$$

$$t_c = \frac{1}{\omega_0}$$

mit $\quad \tilde{k} := k\, t_c\, x_c^2$

dann:

$$\chi' = \psi$$

$$\psi' = -\tilde{k}(\chi^2-1)\psi - \chi$$

Benutze zur Einfachheit x, y, t statt χ, ψ, s und k statt $\tilde{k}$:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -k(x^2-1)\,y - x \end{aligned}}$$

- Wie verhält sich der VdP-Oszillator für $0 < \kappa \ll 1$? Suche periodischen Orbit.

Ansatz:

$$x = r\cos t + \kappa\,\xi(t)$$
$$y = r\sin t + \kappa\,\eta(t) \qquad (1)$$

Kreisbahn mit kleiner Störung

Betrachte Zeitentwicklung des Abstands

$$\frac{d}{dt}\left[x^2+y^2\right] = 2\left[x\dot{x} + y\dot{y}\right]$$

$$= -2\kappa\,(x^2-1)\,y^2$$

$$\underset{\uparrow}{\approx} -2\kappa\, r^2\,(r^2\cos^2 t - 1)\sin^2 t$$

(1) einsetzen und nur Terme bis zur ersten Ordnung in κ behalten

Für periodischen Orbit muß Abstand nach einem Umlauf gleich sein:

$$\int_0^{2\pi} dt\,\frac{d}{dt}\left[x^2+y^2\right] = \left[x^2+y^2\right]_0^{2\pi}$$

$$\approx -2\kappa r^2 \int_0^{2\pi} dt\,(r^2\cos^2 t - 1)\sin^2 t = -\frac{\pi r^2}{2}(r^2-4)$$

also:

$$0 \overset{!}{=} -\frac{\pi}{2} r^2 (r^2 - 4)$$

Lsg $r = 0$ trivial (FP)

$r = 2$ periodischer Orbit

<u>anderer Grenzfall $k \gg 1$</u>:

Zur einfacheren Analyse formen wir die VdP Gl. um:

definiere $f(x) := \frac{1}{3} x^3 - x$

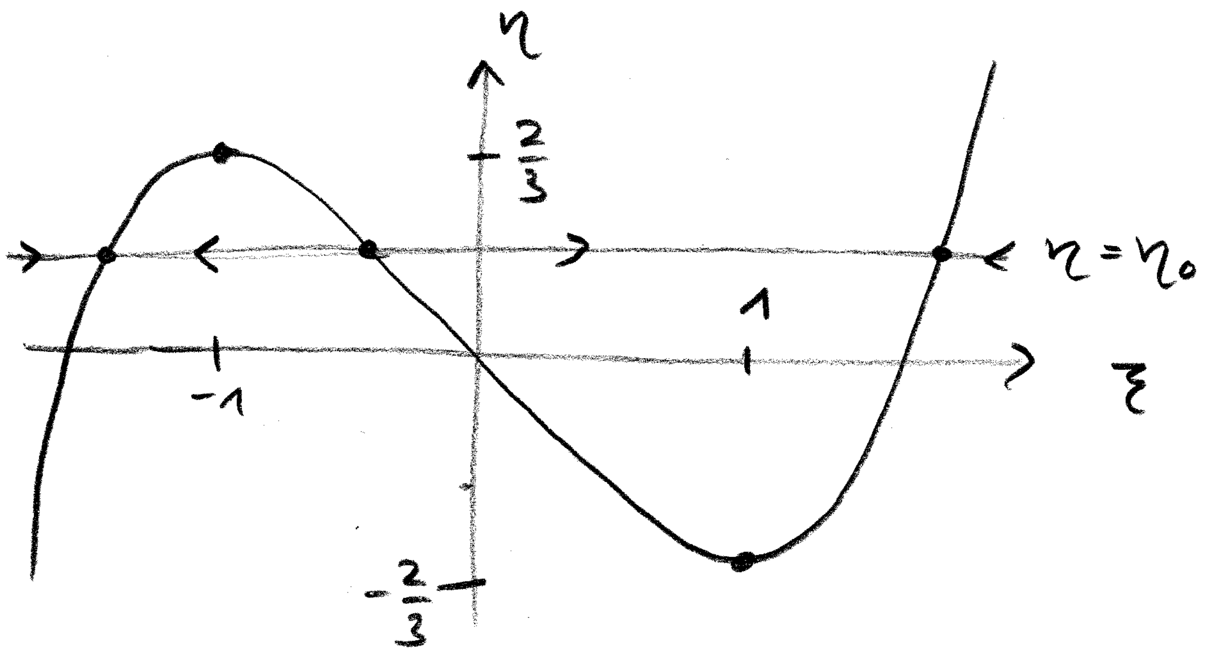
Neue Variablen:

$$\xi := x \qquad \eta := \frac{1}{k} y + f(x)$$

zeige, dass VdP-Gl. in den neuen Variablen gegeben ist durch

$$\dot{\xi} = k [\eta - f(\xi)] \quad \text{„schnelle Gleichg"}$$

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{k} \xi \quad \text{„langsame Gleichg"}$$



η ändert sich langsam.

Für gegebenes festes $\eta = \eta_0$ mit $-\frac{2}{3} < \eta_0 < \frac{2}{3}$ hat ξ drei FP Lösungen ξ_* mit

$$f(\xi_*) = \eta_0$$

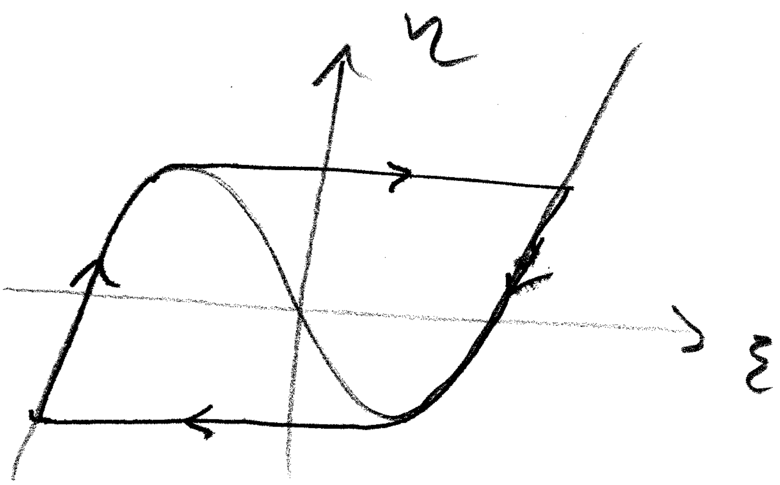
1. Lsg $\xi_* < -1$ stabil
2. Lsg $-1 < \xi_* < 1$ instabil
3. Lsg $1 < \xi$ stabil

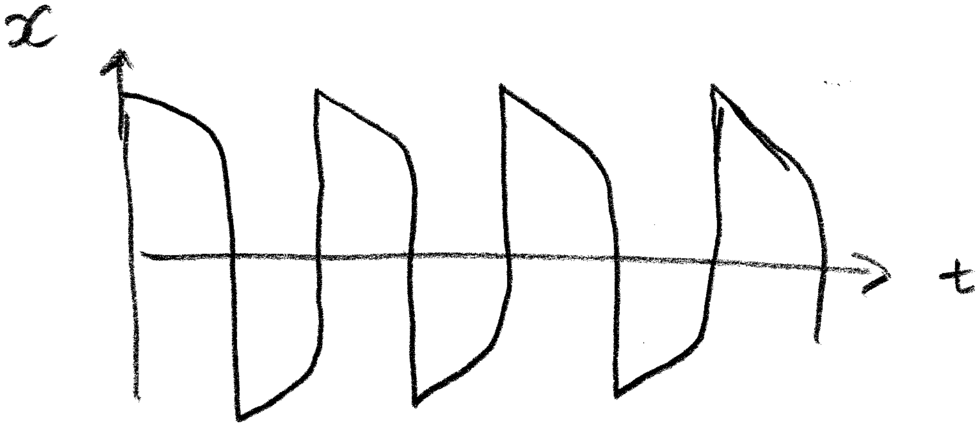
Was passiert in der Nähe der Kurve $f(\xi) = \eta$?

Für $\xi > 1$ nimmt η langsam ab bis $\eta = -\frac{2}{3}$.

ξ passt sich sehr schnell an, so dass die Dynamik auf der Kurve $f(\xi(t)) \simeq \eta(t)$ läuft

an dem Punkt $(\xi, \eta) = (1, -\frac{2}{3})$ verschwindet der stabile FP der schnellen ξ Gl. und ξ springt auf den anderen Ast





$\boxed{\text{Relaxations Oszillationen}}$