

4. Übung nichtlineare Dynamik & Kontrolle

Bemerkungen zum 1. Zettel:

1. Source-code ausdrucken
2. Stabilitätskriterien $\text{tr } J \geq 0, \det J \geq 0$ funktionieren nur in 2D.
3. Bestimmung von Fixpunkten:
Imaginäre Lsg sind keine FP von reellen DGLs
4. Text: entweder Stichpunktartig oder (noch besser) in ganzen Sätzen wobei Formeln (insbesondere =) wie normale Wörter verwenden.
Bsp.

Damit ist $x = 1$.

5. Gute Ideen von Euch: (gleich)

- Tabelle für FP Eigenschaften

	$a > 0$	$a < 0$
$\frac{\kappa^2 a^2}{4 \omega_0^2} < 1$	instab. Fokus	stab. Fokus
$\frac{\kappa^2 a^2}{4 \omega_0^2} > 1$	instab. Knoten	stab. Knoten

- Untersuchung des Larenden FP:

$$J = \begin{pmatrix} -R & R & 0 \\ \gamma_1 & -\gamma_1 & \gamma_1 \sqrt{\lambda} \\ -\gamma_2 \sqrt{\lambda} & -\gamma_2 \sqrt{\lambda} & -\gamma_2 \end{pmatrix} \quad \lambda > 0$$

$$\det J = \underbrace{-2 \gamma_1 \gamma_2 R \lambda}_{< 0} = \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3$$

$$\text{tr } J = \underbrace{-R - \gamma_1 - \gamma_2}_{< 0} = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$$

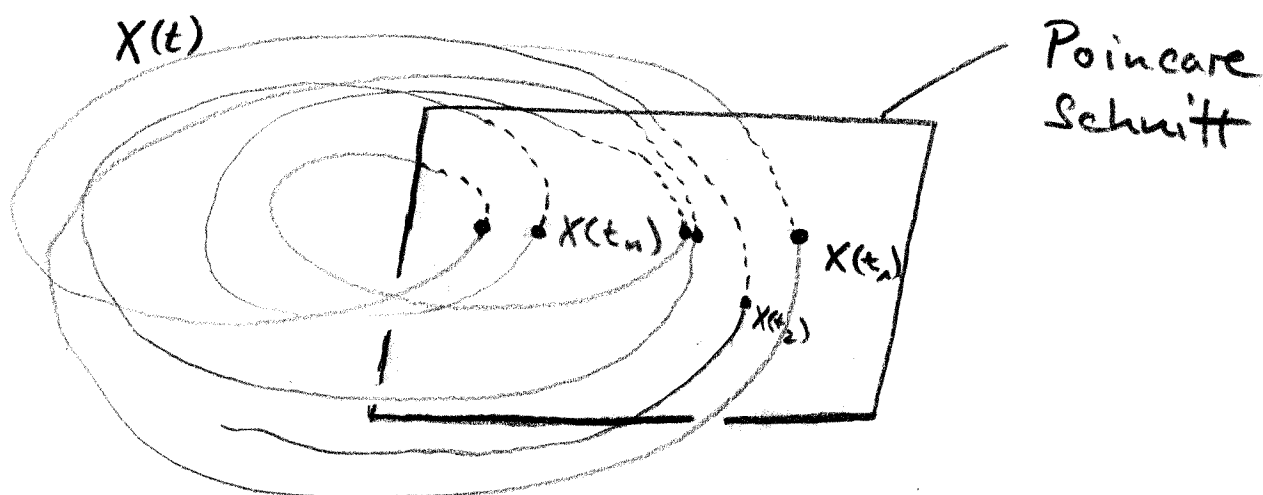
→ Mind ein EW mit $\text{Re}(\mu_i) < 0$
 Hilft hier zwar nicht direkt weiter,
 kann aber in anderen Problemen hilfreich
 sein.

Iterierte Abbildungen (Maps):

• Motivation

dynamisches System: $\dot{X}(t) = F(X(t)) \quad X \in \mathbb{R}^n$

- schwierig zu untersuchen da nicht exakt lösbar
- Vereinfachung: Betrachte das System zu diskreten Zeiten

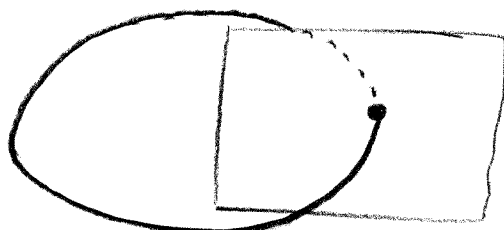


→ Man erhält eine Abbildung

$$f: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$$

Durch f lassen sich die wichtigen Eigensch. des dyn. Systems beschreiben.

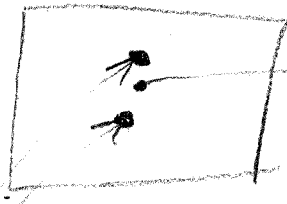
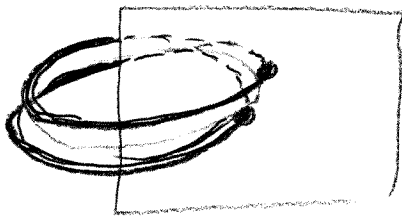
Bsp: Periodischer Orbit



FP der Abbildung

PO stabil \Leftrightarrow FP von f stabil

weitere Bsp: Periodenverdopplung



instabiler FP
(entspricht instabil gewordenem Orbit)

Periodischer Orbit
mit Periode $p=2$.

www.chaosbook.org

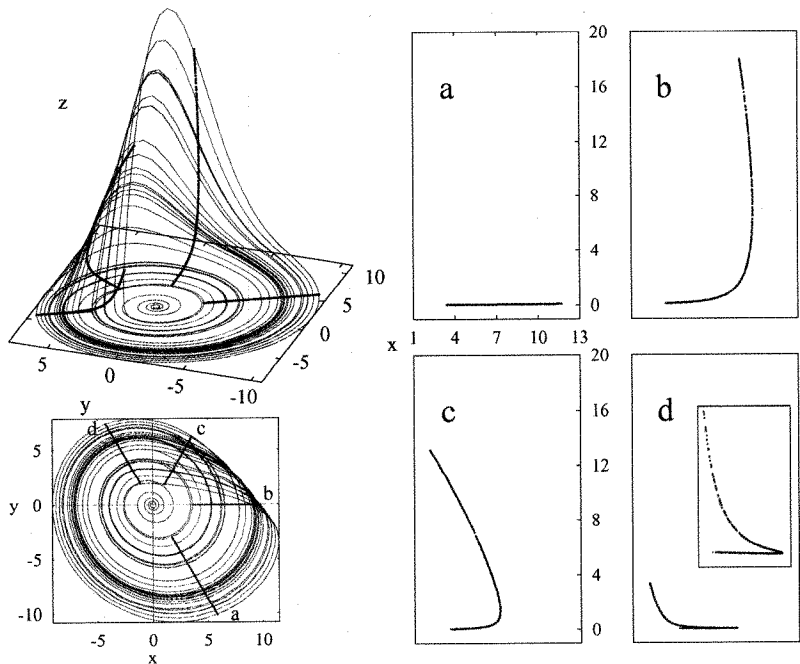


Figure 3.5: (Right:) a sequence of Poincaré sections of the Rössler strange attractor, defined by planes through the z axis, oriented at angles (a) -60° (b) 0° , (c) 60° , (d) 120° , in the x - y plane. (Left:) side and x - y plane view of a typical trajectory with Poincaré sections superimposed. (R. Paškauskas)

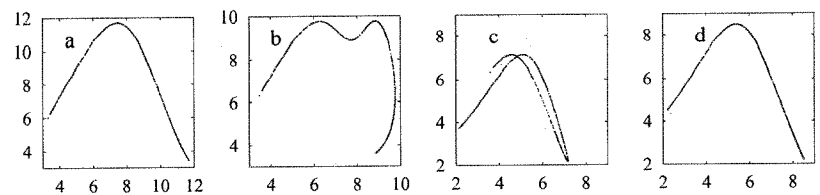


Figure 3.6: Return maps for the $R_n \rightarrow R_{n+1}$ radial distance Poincaré sections of figure 3.5. (R. Paškauskas)

• allgemeines zur Analyse von Maps

$$f: \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

$$x_n \longmapsto x_{n+1} = f(x_n)$$

Fixpunkte:

- Lsg. von $x = f(x)$
- Stabilität eines FP's x_* :

$$x_n = x_* + \delta x$$

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(x_* + \delta x) \approx f(x_*) + Df(x_*) \delta x \\ &= x_* + Df(x_*) \delta x \end{aligned}$$

FP stabil wenn für EV λ_i von $J := Df(x_*)$ gilt:
 $|\lambda_i| < 1$ (für alle i)

Bei DGL war $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ entscheidend

Periodische Orbits:

Periodischer Orbit mit Periode p :

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_p = f(x_{p-1})$$

und $x_0 = x_p$

Wir können auch schreiben

$$x_0 \stackrel{!}{=} x_p = f(x_{p-1}) = \underbrace{f(f(x_{p-2}))}_{f^2(x_{p-2})}$$
$$= \dots = f^p(x_0).$$

Damit ist ein periodischer Orbit mit Periode p ein FP der p -fach iterierten Abbildung

$$x_* = f^p(x_*)$$

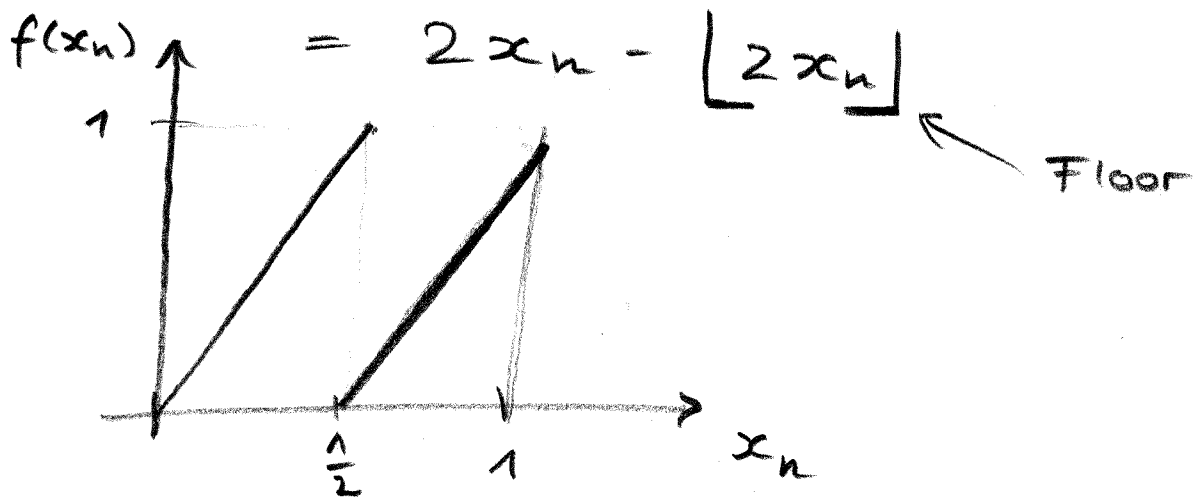
1D-Maps

Oft reichen schon 1D-Maps um Eigenschaften v. komplexen Systemen zu erklären.

• Bernoulli-Map

$$f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

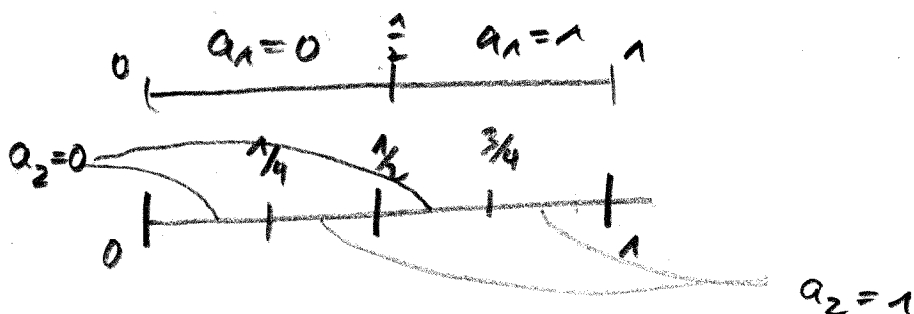
$$x_{n+1} = f(x_n) := (2x_n) \bmod 1$$



Das Verhalten läßt sich mit einer Symbolischen-Dynamik verstehen

Stelle $x \in [0, 1]$ binär dar:

$$x = \sum_{v=1}^{\infty} a_v 2^{-v} \hat{=} (a_1, a_2, a_3, \dots)$$



Was macht die Bernoulli Map mit einer Folge

$$x_0 \hat{=} (a_1, a_2, a_3, \dots)$$

$$f(x_0) = (a_2, a_3, \dots)$$

Bernoulli map löscht den ersten Eintrag und schiebt alles _{um eins} nach links.

Eigenschaften:

- Rationale Zahlen haben periodische Binärfolgen \rightarrow periodische Orbits von f
- Kleinste Unterschiede (in der milliardsten Stelle) werden (exponentiell) vergrößert \rightarrow positiver Lyapunov exponent.
- Die Sequenz $x = (a_1, a_2, \dots)$ hat die selben Eigenschaften wie ein Münzwurf: z.B.

$$1 \hat{=} \text{Kopf} \quad 0 \hat{=} \text{Zahl}$$

Deterministisches Verhalten aber scheinbar zufällig

- Dynamik ist ergodisch:
Das ganze Intervall $[0, 1]$ wird beliebig dicht abgedeckt.

Lyapunov - Exponenten

Betrachte Wachstum einer kleinen Störung

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \frac{|\delta x_k|}{|\delta x_0|}$$

genaue def:

$$\lambda(x_0) := \limsup_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{k} \sup_{\|\delta x_0\| \rightarrow 0} \ln \left[\frac{\|\delta x_k\|}{\|\delta x_0\|} \right] \right]$$

Numerisch:

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln |f'(x_n)| = \langle \ln |f'| \rangle$$

$$x_n = f(x_{n-1})$$