Delay Differential Equations

DDE mit einem konstanten Delay:

$$\dot{X}(t) = F[t, X(t), X(t-\tau)]$$

Anfangsbedingung ist eine Funktion $\phi(t)$

$$X(t) = \phi(t) \qquad t \in [-\tau, 0]. \qquad \text{(history-Fkt)}$$

Daher sind DDEs ∞-dimensional.

Method of Steps:

- In manchen fällen können DDEs analytisch gelöst werden:

Idee: Schrittweise auf Intervallen $t \in [n\tau, (n+1)\tau]$ lösen.

Beispiel aus der VL:

$$x(t) = -a\, x(t) + b\, x(t-\tau)$$

mit Anfangsbedingung

$$x(t) = x_0(t) \qquad t \in [-\tau, 0]$$

Betrachte Delay-Term als inhomogenität für $t \in [0, \tau]$

$$\dot{x}(t) + a\, x(t) = b\, x(t-\tau) \qquad (i)$$
$$= b\, x_0(t-\tau)$$

Lsg mit Greenfkt:

$$\dot{G}(t) + a\,G(t) = \delta(t)$$

$$G(t) = \Theta(t)\, e^{-at}$$

Heaviside

Lsg von (i) für $t \in [0, \tau]$

$$x(t) = x_0(0) + b\int_0^t dt'\, G(t-t')\, x_0(t'-\tau)$$

$$= x_0(0) + b\, e^{-at} \underbrace{\int_0^t dt'\, e^{at'}\, x_0(t'-\tau)}$$

kann für explizites x_0 (eventuell) ausgerechnet werden

→ Liefert Lsg $x_1(t)$ für $t \in [0, \tau]$

Selbes Verfahren für $t \in [\tau, 2\tau]$:

$$x(t) = x_1(\tau) + b\int_\tau^t dt'\, G(t-t')\, x_1(t-\tau)$$

⋮

Beispiel: Mackey-Glass Gleichung

Beschreibt die Produktion von weißen Blutkörperchen.

$x(t)$ Konzentration von Blutkörperchen im Blut

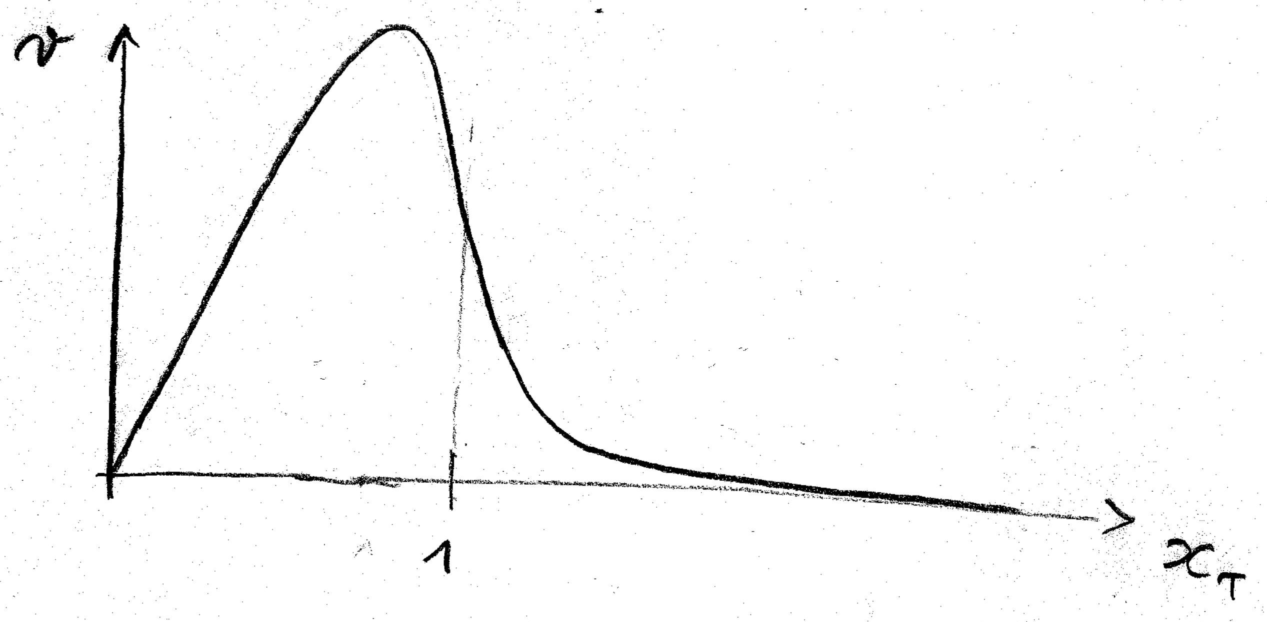
Annahme:

- Blutkörperchen werden mit der Zeit abgebaut (sterben ab, etc) Rate γ
- Produktion von neuen Zellen richtet sich nach vorhandener Konzentration (zur Regulierung) aber durch verzögerte Reaktion der Produktion (z.B. Reifungszeit der Zellen) tritt eine Delay-Zeit auf

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\vartheta[x(t-\tau)]}_{\text{Produktion}} - \underbrace{\gamma x}_{\text{Abbau}}$$

Abkürzung $x_\tau = x(t-\tau)$

Wie sieht die Produktionsrate aus?



- $x_T \gg 1$: genug Zellen vorhanden
  Produktion $\rightarrow 0$
- $x_T \ll 1$: Person sehr krank
  $\rightarrow$ niedrige Produktionsrate
- Dazwischen liegt Maximum der Produktionsrate

Beispiel Fkt:

$$\vartheta(x_T) = \beta \frac{x_T}{1 + x_T^n}$$

→ Mackey-Glass Gl

$$\boxed{\dot{x}(t) = \beta \frac{x(t-\tau)}{1 + x(t-\tau)^n} - \gamma x}$$

Aus Daten abgeleitete Werte für gesunde Personen:

$\gamma = 0{,}1 \text{ day}^{-1}$

$\beta = 0{,}2 \text{ day}^{-1}$

$n = 10$

$\tau = 6 \text{ day}$

→ Periodischer Orbit mit $T \simeq 20$ day

Leukämi führt zu Veränderungen im Produktionsablauf → höhere τ Werte
$\tau > 10$

→ chaotisches Verhalten
wurde bei Betroffenen beobachtet

Fixpunkte von DDEs:

- Können genauso gefunden werden wie bei ODEs:

$$\dot{x}(t) = F[x(t), x(t-\tau)] \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

Für FP ist $x(t) = x_*$ für alle t

$\rightarrow$ zu Lösen:

$$0 = F[x_*, x_*]$$

- Stabilität: Betrachte kleine Störung
$x(t) = x_* + \delta x(t)$

$$\rightarrow \quad \delta\dot{x}(t) = F[x_* + \delta x(t), x_* + \delta x(t-\tau)]$$

$$\approx \underbrace{F[x_*, x_*]}_{=0} + D_1 F[x_*, x_*]\,\delta x(t)$$

$$+ D_2 F[x_*, x_*]\,\delta x(t-\tau)$$

$$\rightarrow \quad \delta\dot{x} = A\,\delta x(t) + B\,\delta x(t-\tau) \qquad \text{(ii)}$$

$$A = D_1 F\big|_{x_*} \qquad B = D_2 F\big|_{x_*}$$

Ansatz:

$$\delta X(t) = u\, e^{\Lambda t}$$

konstanter Vektor

einsetzen in (ii):

$$u \Lambda e^{\Lambda t} = A u e^{\Lambda t} + B u e^{\Lambda (t-T)}$$

$$\rightarrow \underbrace{\left(A - \Lambda + B e^{-\Lambda T}\right)}_{=:M} u e^{\Lambda t} = 0$$

Damit Lsg. existieren muss

$\det M = 0$ sein

$$\chi(\Lambda) := \det\left[A - \Lambda + B e^{-\Lambda T}\right] \overset{!}{=} 0$$

transzendent charakteristische Gleichung

Polynom in Λ und $e^{-\Lambda T}$.

Bemerkungen:

- Im allgemeinen lassen sich die EW Λ nur nummerisch bestimmen (Nullstellen von $\chi(\Lambda)$)
- Es gibt abzählbar ∞-viele Lsg. Λ
- Für 1D Gl. $A, B, X \in \mathbb{R}$ und Spezialfälle in höheren dimensionen (siehe VL) erhält man eine lineare charakteristische GL.

$$\chi(\Lambda) = a - \Lambda + b e^{-\Lambda\tau} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

die mit der Lambert-W Funktion gelößt werden können (siehe VL)

Bifurkationen von Fixpunkten von DDEs

Was können wir über Stabilität von X_* aussagen, wenn $\chi(\lambda)$ nichtlinear ist?

→ Bifurkationskurven im Parameterraum suchen.

<u>Ansatz:</u> für Hopf Bifurkation

$$\lambda = i\omega \quad \text{in } \chi \text{ einsetzen}$$

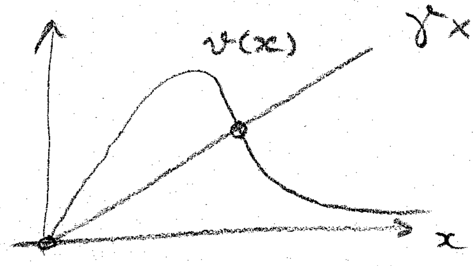
gibt zwei Gl:

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\,\chi(i\omega) = 0 \\ \mathrm{Im}\,\chi(i\omega) = 0 \end{cases}$$

ω eliminieren gibt Bifurkationskurve im Parametrraum (Erinnerung 3. Tutorium)

<u>Bsp:</u> Mackey-Glass

$$\dot{x} = \beta \frac{x_\tau}{1 + x_\tau^n} - \gamma x$$



FP:

$$0 = \beta \frac{x}{1 + x^n} - \gamma x$$

$$0 = \beta x - \gamma x (1 + x^n)$$

$$\rightarrow \quad x = 0, \qquad x = \sqrt[n]{\frac{\beta}{\gamma} - 1} \quad \text{ex. nur für } \beta > \gamma$$