Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 27. Mai 2010
http://www.itp.tu-berlin.de Direktzugang: 78850

VL: Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD, Dr. Philipp Hövel
UE: Dipl.-Phys. Valentin Flunkert, MSc

5. Übungsblatt zur Nichtlinearen Dynamik und Kontrolle

Abgabe: Mo 7.6. 12:15 in der Übung. Die Abgabe erfolgt in **2er oder 3er Gruppen**.
Bitte den Source-Code mit ausdrucken.

Aufgabe 9 (10 Punkte): *Euler-Methode für Delay-Differentialgleichungen*

In dieser Aufgabe soll die in der Vorlesung behandelte Delay-Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda\, x + \omega\, y - K\,[x(t) - x(t-\tau)],\\ \dot{y} &= -\omega\, x + \lambda\, y - K\,[y(t) - y(t-\tau)],\end{aligned}$$

numerisch gelöst werden. Reproduzieren Sie damit Fig. 1 aus der VL "Zeitverzoegerte Rueckkopplung" vom 20.05.10.
Diskutieren Sie ausserdem, welche Schwierigkeiten es geben könnte ein Mehrschrittverfahren (wie z.B. Runge-Kutta) auf Delay-Differentialgleichung anzuwenden.
Hinweise zur Numerik:

- Das Euler-Verfahren für eine Delay-Differentialgleichung

  $$\dot{X} = f[X(t),\, X(t-\tau)]$$

  ist gegeben durch

  $$X_{n+1} = X_n + dt \cdot f[X_n,\, X_{n-\Delta}],$$

  wobei $\Delta = \tau/dt$.

- Um den Delay-Term auswerten zu können muss die Lösung zwischengespeichert werden. Verwenden Sie für die x und y Variable jeweils ein history-Array der Länge `delta=int(tau/dt)`. Initialisieren Sie diese Arrays mit Nullen und schreiben Sie in die Arrays dann zyklisch die neuen Werte (d.h.: Wenn Sie am Ende angekommen sind fangen Sie von vorne an).
  Tipp: Verwenden Sie die Modulo-Operation %.

- Lassen Sie das System von $t = 0$ bis $t = \tau$ ohne Kontrolle ($K = 0$) laufen, um die history-Arrays zu initialisieren, und schalten Sie dann die Kontrolle ein.

- Speichern Sie die berechneten x und y Werte in entsprechenden Ausgabearrays und plotten Sie dann die Phasenportraits wie in Fig. 1 aus der VL.

- Wenn Sie `python` benutzen, können Sie das Template `euler.py` von der Homepage als Vorlage verwenden.

Bonus: Untersuchen Sie analytisch (analog zur VL) ob man einen Sattel ($\lambda > 0$ und $\mu < 0$)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda\, x - K\,[x(t) - x(t-\tau)],\\ \dot{y} &= \mu\, y - K\,[y(t) - y(t-\tau)],\end{aligned}$$

mit der Kontrolle stabilisieren kann.

Bitte Rückseite beachten! ⟶

5. Übung SS2010

Aufgabe 10 (10 Punkte): *Logistisches Populationsmodell mit Delay*
Betrachten Sie das folgende Modell für die Anzahl N an Individuen in einer Population

$$\dot{N}(t) = rN(t)[1 - N(t-\tau)/K],$$

wobei r die Wachstumsrate und K ein Maß für die Tragfähigkeit der Umwelt ist.

1. Finden Sie die Transformation, die das Modell in die dimensionslose Gleichung

   $$x'(s) = x(s)[1 - x(s-a)]$$

   überführt. Betrachten Sie im folgenden nur noch die dimensionslose Gleichung.

2. Die Fixpunkte liegen offensichtlich bei $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$. Zeigen Sie, dass x_0 stets instabil ist und x_1 für $a = 0$ stabil ist.

3. Finden Sie den Wert $a > 0$, bei dem x_1 die Stabilität in einer Hopf-Bifurkation verliert.