Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Kathy Lüdge
Dipl.-Phys. Frank Milde
Malte Langhoff

17. Juni 2010

www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss10/pvbsc/thermo/

10. Übungsblatt – Thermodynamik und Statistik SS10

Abgabe: Mo. 28.06.2010 bis 20 Uhr im Briefkasten

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet.
Abgabe in Dreiergruppen! *Bitte immer Namen und Matrikelnummer angeben.*

Aufgabe 21 (10 Punkte): *Spezifische Wärme*

Zeigen Sie folgende Relationen der spezifischen Wärmen c_p bzw. c_V. Dabei soll die Teilchenzahl N als konstant angenommen werden. κ_T ist die isotherme Kompressibilität $\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$ und α der Ausdehnungskoeffizient $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$.

(a) $c_p - c_v = \frac{TV\alpha^2}{\kappa_T}$

(b) $c_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V$

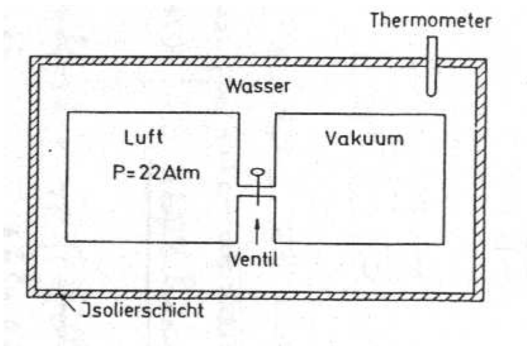
(c) $dS(T,V) = \frac{c_V}{T}dT + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV$

(d) $dS(T,p) = \frac{c_p}{T}dT - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dp$

(e) $dE(T,V) = c_V dT + \left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p\right] dV$

Aufgabe 22 (10 Punkte): *Gay-Lussac-Prozess*

Ein Gas mit der Zustandsgleichung $p = p(V,T)$ befindet sich zunächst in einem Behälter (siehe Skizze). Nach Öffnen des Ventils strömt das Gas in das Vakuum des rechten Behälters. Das Gesamtvolumen ist dabei isoliert.



(a) Warum bleibt beim Gay-Lussac-Prozess die innere Energie E konstant ?

(b) Die Änderung der Temperatur wird durch den Gay-Lussac-Koeffizienten $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_E$ bestimmt. Zeigen Sie :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_E = \frac{T}{c_V}\left[\frac{p}{T} - \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\right] \quad .$$

(c) Diskutieren Sie den Gay-Lussac-Koeffizienten für das ideale Gas und das van-der-Waals Gas.

Bitte Rückseite beachten!⟶

Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Kathy Lüdge
Dipl.-Phys. Frank Milde
Malte Langhoff

17. Juni 2010

www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss10/pvbsc/thermo/

Aufgabe 23 (20 Punkte): Bonusaufgabe Elektronen im Metall

Das ideale Fermi-Gas kann als Quantenanalogon zum klassischen idealen Gas gesehen werden: Es ist ein System aus fermionischen Partikeln zwischen denen keine (oder vernachlässigbare) Wechselwirkung besteht. Elektronen in einem Metall erscheinen hier zunächst als schlechtes Beispiel (für so ein nichtwechselwirkendes Gas). Es kann jedoch in der Festkörpertheorie gezeigt werden, das im Mittel die positiven Hintergrundladungen der Ionen die negativen Ladungen der Elektronen neutralisieren und somit doch ein gutes Model vorliegt.

(a) Bestimmen Sie zunächst über die mittlere Anzahl der Elektronen $\overline{N}$ das chemische Potential $\mu((T = 0K) = \varepsilon_F$ und die innere Energie E bei $T = 0$ K.

(b) Zeigen Sie unter Verwendung folgender Entwicklung für eine beliebige Funktion ϕ unter Annahme niedriger Temperaturen

$$\int_0^\infty d\varepsilon \phi(\varepsilon) f^F(\varepsilon, T) = \int_0^\mu d\varepsilon \phi(\varepsilon) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \phi'(\varepsilon)\big|_{\varepsilon=\mu} + \frac{7\pi^4}{360} (k_B T)^4 \phi'''(\varepsilon)\big|_{\varepsilon=\mu} + \ldots,$$

dass für die mittlere Teilchenzahl gilt:

$$\overline{N} = \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar}\right)^{3/2} \mu^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{k_B T}{\mu}\right)^2 + \ldots\right]$$

Achtung: μ ist hier das temperaturabhängige Ferminiveau $\mu(T)$, nicht ε_F.

(c) In zweiter Ordnung von T ist es ausreichend μ durch ε_F zu ersetzen. Stellen Sie damit $\mu(T)$ dar. Was gilt im Grenzfall $T \to 0$?

(d) Zeigen Sie mit Hilfe der gleichen Entwicklung, dass

$$E = \frac{V}{5\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar}\right)^{3/2} \mu^{5/2} \left[1 + \frac{5\pi^2}{8} \left(\frac{k_B T}{\mu}\right)^2 + \ldots\right]$$

für die innere Energie gilt.

(e) Berechnen Sie nun die Wärmekapazität unter Verwendung der Ergebnisse von (c) und (d). Was fällt im Vergleich zum klassischen Fall und zum Phononensystem auf?