Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Kathy Lüdge
Dipl.-Phys. Frank Milde
Malte Langhoff

13. Mai 2010

www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss10/pvbsc/thermo/

5. Übungsblatt – Thermodynamik und Statistik SS10

Abgabe: Mo. 24.05.2010 bis 20 Uhr im Briefkasten

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet.
Abgabe in Dreiergruppen! *Bitte immer Namen und Matrikelnummer angeben.*

Aufgabe 11 (7 Punkte): Teilchen im Kasten: thermische Zustandsgleichung
Wiederholen Sie aus der VL die thermodynamischen Eigenschaften eines Teilchens im Potential.

(a) Bestimmen Sie die Wellenfunktion und die Eigenenergien ε_i eines Teilchens in einem dreidimensionalen unendlich tiefen Potenzialtopf. Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme und geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $w_i(\varepsilon_i)$ an.

(b) Diskutieren Sie die Bedeutung der thermischen Wellenlänge $\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mkT}}$.

(c) Bestimmen Sie im Quantenlimes (nur Grundzustand, starke Quantisierung der Zustände) die Freie Energie F und die thermische Zustandsgleichung.

(d) Betrachten wir nun einen Kasten mit variabler Teilchenzahl (keine Teilchen-WW). Berechnen Sie für den klassischen Grenzfall (T groß) die großkanonische Zustandssumme und daraus die thermische Zustandsgleichung.(Hinweis: Berechnen Sie auch $\bar{N}$)

Aufgabe 12 (13 Punkte): Kanonisches Ensemble und Zweiniveau-System
Betrachten Sie ein quantenmechanisches System im Volumen V, das im Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T steht. Der Hamiltonoperator $\hat{H}$ habe zwei Eigenvektoren $|0\rangle$ und $|1\rangle$ mit den dazugehörigen Eigenwerten $E_n = \gamma V^{-2/3} n \quad (n \in \{0, 1\})$.

(a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme $Z = \mathrm{Sp}\left(\exp(-\beta\hat{H})\right)$. Warum handelt es sich hier um ein kanonisches Ensemble ?

(b) Schreiben Sie den generalisierten statistischen Operator $\hat{\rho}$ für dieses Ensemble in der Form $\hat{\rho} = \sum_{n=0,1} w_n |n\rangle\langle n|$ auf. Bestimmen Sie das Verhältnis w_1/w_2 und interpretieren Sie es.

(c) Berechnen Sie die innere Energie $E(T, V) = \langle\hat{H}\rangle$ als Funktion von V und T.

(d) Ermitteln Sie die Entropie S. Was ergibt sich in den Grenzfällen $T \to \infty$ und $T \to 0$ für S? Diskutieren Sie das Ergebnis.

(e) Bestimmen Sie aus der Entropie den Druck p. Welche Relation gilt zwischen E und p?

(f) Bestimmen Sie nun die Entropie S und den Druck p aus der freien Energie F. Verwenden Sie dabei das Zwischenergebnis zur kanonischen Zustandssumme.