

12. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II (Bonusblatt)

Abgabe: Dienstag, den 12. Juli 2011 vor der Übung
Ausgabe: Dienstag, den 28. Juni 2011

Approximative Theorie und Newtonscher Grenzfall (15 Bonuspunkte)

Die Newtonsche Gravitationstheorie steht in guter Übereinstimmung mit den Experimenten, die im Laufe der vergangenen Jahrhunderte gemacht worden sind. Die Abweichungen der Einsteinschen Gravitationstheorie sind in den meisten Fällen innerhalb der Fehlergrenzen. In den anderen Fällen ergibt sich eine gute Übereinstimmung mit der Einsteinschen Theorie.

Es ist daher logisch erforderlich, daß in erster Näherung die Einsteinsche Gravitationstheorie in die Newtonsche übergeht. Aufgabe dieses Bonusblattes ist es, dies zu zeigen. Dazu werden zunächst folgende Annahmen gemacht werden:

- Die Metrik lautet: $g_{ij} = \eta_{ij} + \gamma_{ij}$. Dabei ist $\eta_{ij} = \text{diag}[-1, 1, 1, 1]$ die Minkowski-Metrik. Wir nehmen an, daß die Größen γ_{ij} , $\partial_k \gamma_{ij}$ und $\partial_k \partial_l \gamma_{ij}$ gegenüber Eins vernachlässigt werden können und von derselben Ordnung sind. Produkte dieser Größen können daher im Vergleich zu diesen Größen selbst vernachlässigt werden.
- Die Geschwindigkeiten der Teilchen, die sich im Gravitationsfeld bewegen, sollen klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sein. Wir nehmen also an: $v_x v_y / c^2 \ll 1$ usw.

Zunächst kann jetzt die Geodätengleichung genähert werden. Mit Hilfe der gemachten Annahmen kommt man zu folgendem Zwischenergebnis, das abzuleiten ist:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} = -c \frac{\partial \gamma_{\alpha 0}}{\partial t} + \frac{c^2}{2} \frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial t} \frac{dx^\beta}{dt} + c \left(\frac{\partial \gamma_{\beta 0}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \gamma_{\alpha 0}}{\partial x^\beta} \right) \frac{dx^\beta}{dt} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{00}}{\partial t} \frac{dx^\alpha}{dt} \quad (1)$$

Beachten Sie dabei, daß in dieser Näherung zwischen dem Weltlinienparameter $d\sigma := i ds$ und der Koordinatenzeit dt aufgrund der Näherung der Zusammenhang $d\sigma = c dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$ mit $v^2 = \delta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ besteht. Desweiteren erweist sich folgende Formel bei der obigen Rechnung als hilfreich:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{(dx^0)^2} = \frac{d^2 x^\alpha}{d\sigma^2} - \frac{d^2 x^0}{d\sigma^2} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \quad (2)$$

Nutzen Sie jetzt die Einstein-Gleichung $R_{ik} = -\kappa(T_{ij} - T/2 g_{ij})$ und nähern Sie diese unter Zuhilfenahme der obigen Annahmen. Zudem wird dazu eine weitere Annahme getätigt:

- Der Energie-Impuls-Tensor auf der rechten Seite der Einstein-Gleichung wird jetzt vorgeschrieben. Da die Berechnung im allgemeinen Fall sehr schwierig wird, wird angenommen, daß ein Koordinatensystem existiert, in dem die Materie ruht, die das Schwerfeld erzeugt. Die einzige nicht verschwindende Komponente des Energie-Impuls-Tensors ist daher $T_{00} = \mu c^2$. Für die Massendichte muß folglich gelten: $\mu = \mu(x^1, x^2, x^3)$. Die Massenverteilung ist also stationär. Demgemäß muß dies auch für das Gravitationspotential gelten: $\gamma_{ij} = \gamma_{ij}(x^1, x^2, x^3)$.

Ein Blick auf (1) zeigt, daß offenbar jetzt noch die Größen $\left(\frac{\partial\gamma_{\beta 0}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial\gamma_{\alpha 0}}{\partial x^\beta}\right)$ und γ_{00} zu bestimmen sind. Zeigen Sie, daß für beide Größen aus der Einsteingleichung eine Laplace- / Poissongleichung gewonnen werden kann. Die Poissongleichung ist dann die Gleichung für das Newtonsche Gravitationspotential. Unter der gerechtfertigten Annahme, daß weit von den Quellen, die das Schwerfeld erzeugen, γ_{ij} und seine Ableitungen gegen Null gehen, kann man sowohl die Laplace- als auch die Poissongleichung lösen und auf das Newtonsche Bewegungsgesetz im Schwerfeld in integraler Form schließen:

$$\frac{d^2\vec{r}_P}{dt^2} = \frac{\kappa c^4}{8\pi} \text{grad}_P \iiint \frac{\mu(\vec{r}_Q)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_Q|} dV_Q \quad (3)$$

Anhand der Näherung wird jetzt der Zusammenhang zwischen Newtonscher und Einsteinischer Gravitationskonstante klar.

Beachten Sie bei Ihrer Rechnung noch die folgenden Hinweise:

- Der Krümmungstensor ist definiert durch: $R_{lkij} = 2 \left(\partial_{[k} \Gamma_{l]i}^q + \Gamma_{p[k}^q \Gamma_{l]i}^p \right) g_{qj}$.
- Das Christoffelsymbol ist definiert durch: $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_j g_{li} + \partial_i g_{lj} - \partial_l g_{ij})$.
- Die Geodätengleichung ist gegeben durch: $\frac{d^2 x^k}{d\sigma^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{d\sigma} \frac{dx^j}{d\sigma} = 0$.
- Griechische Indizes sind räumlich, lateinische raum-zeitlich.
- In Gleichung (3) bezeichnet Q den Quellpunkt und P den Aufpunkt.

Eine Kommentierung Ihres Vorgehens wird erwartet! Dafür gibt es auch Punkte!

Sprechstunde: Nach Vereinbarung oder direkt nach der Übung.
 Falls es Fragen gibt, bin ich auch per Mail erreichbar:
 gerold.schellstede@campus.tu-berlin.de