Technische Universität Berlin, Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. v. Borzeszkowski; Dr. Chrobok; Schellstede

3. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

Abgabe: Dienstag, den 10. Mai.2011 vor der Übung
Ausgabe: Dienstag, den 26. April 2011

Variationsprinzip II (10 Punkte)
Die Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes mit Quellen im Riemannschen Raum lautet:

$$\mathcal{L}_M = \sqrt{-g} L_M = \sqrt{-g} \left(\frac{c}{16\pi} F_{\kappa\mu} F_{\lambda\nu} g^{\kappa\lambda} g^{\mu\nu} + j_\kappa g^{\kappa\lambda} A_\lambda \right) . \tag{1}$$

Hierbei sind A_κ das Vierer-Potential, j^κ der Strom und $F_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha$ der (anitsymmetrische) elektromagnetische Feldstärketensor.

a) Bestimmen Sie durch Ausführung der Variation:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\mathcal{L}_M)}{\delta g_{\alpha\beta}} \tag{2}$$

den Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes. Warum müssen die Christoffelsymbole bei dieser Variation nicht beachtet werden? Achtung es muss ein symmetrischer Tensor herauskommen.

b) Zeigen Sie, daß die homogene Maxwellgleichung automatisch durch den Zusammenhang zwischen Feldstärketensor $F_{\alpha\beta}$ und dem Potentialtensor A_γ erfüllt wird.

c) Leiten Sie durch Variation nach den Vierer-Potentialen A_α die **kovarianten** inhomogenen Maxwellgleichungen ab. Da dieses Problem mit den zugehörigen Lagrange-Gleichungen äquivalent ist, können diese auch benutzt werden. **Hinweis**: Benutzen Sie die Identität $\Gamma^\kappa_{\kappa\tau} = \frac{\partial_\tau g}{2g}$.

d) Beweisen Sie mit der in c) erhaltenen kovarianten inhomogenen Maxwellgleichung, dass die **kovariante** Ladungserhaltung $\nabla_\kappa j^\kappa = 0$ gilt.

e) Bestimmen Sie die Divergenz des in a) abgeleiteten Energie-Impuls-Tensor und vereinfachen Sie diese weitestgehend. Diskutieren Sie das Ergebnis.

Sprechstunde: Nach Vereinbarung oder direkt nach der Übung.
Falls es Fragen gibt, bin ich auch per Mail erreichbar:
gerold.schellstede@campus.tu-berlin.de