Prof. Holger Stark,
Dipl. Phys. Ken Lichtner, Dipl. Ing. Andreas Zöttl,
Andrea Vüllings, Benjamin Regler, Christian Fräßdorf, Jan Techter

# 10. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

**Abgabe: Mo./Di. 20./21. Juni 2011 im Tutorium**

*Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an. Kreuzen Sie am Beginn des Tutoriums die mündlichen Aufgaben an, die Sie bearbeitet haben und an der Tafel vorrechnen können.*

**Aufgabe 34 (20 Punkte):** *Nabla Operator (schriftlich) (10+2+8 Punkte)*

In der Vorlesung (Glg. 6.23) wurde der Nabla-Operator als Vektor-Differentialoperator in beliebigen Koordinaten eingeführt.

(a) Leiten Sie den Nabla-Operator in Kugelkoordinaten her.

(b) Bestimmen Sie damit die folgenden Gradienten in Kugelkoordinaten:

$$\nabla r, \ \ \nabla f(r).$$

Hierbei ist $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ die Länge eines Ortsvektors $\underline{r} = (x, y, z)^T$.

Betrachten Sie nun das Potential eines Dipols, das gegeben ist durch:

$$U(r, \vartheta) = \frac{p \cos(\vartheta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

(c) Berechnen Sie das elektrische Feld $\underline{E} = -\nabla U$ und dessen Betrag $|\underline{E}|$. Mit welcher Potenz nimmt $|\underline{E}|$ mit dem Abstand vom Dipol ab und für welche Winkel $\vartheta$ ist $|\underline{E}|$ minimal bzw. maximal?

Hinweis: $p$ und $\epsilon_0$ sind Konstanten.

**Aufgabe (35)**: *Ableitungsregeln (mündlich)*
Zeigen Sie für den Nablaoperator in kartesischen Koordinaten $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})^T$ folgende Regeln:

(a) Gegeben sind die Skalarfelder $U, V : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ und die Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\nabla(aU + bV) = a\nabla U + b\nabla V \qquad \text{(Linearität)}$$
$$\nabla(UV) = (\nabla U)V + U\nabla(V) \qquad \text{(Leibniz-Regel)}$$

(b) Es sei $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$ ein konstanter Vektor, $\underline{r} = (x, y, z)^T$ der Ortsvektor mit Länge $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ und Richtung $\underline{\hat{r}} = \frac{\underline{r}}{r}$ und $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie:

$$\nabla(\underline{a} \cdot \underline{r}) = \underline{a},$$
$$\nabla r = \underline{\hat{r}},$$
$$\nabla f(r) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}(r)\underline{\hat{r}}.$$

**Aufgabe (36)**: *konservative Kräfte (mündlich)*

Berechnen Sie die Kräfte $\underline{F} = -\nabla\phi$ der folgenden Potentiale:

(a) $\phi_1(x, y, z) = \frac{1}{r^n}$,
$\phi_2(x, y, z) = \ln(r)$,

(b) $\phi_3(x, y, z) = \frac{e^{-kr}}{r}$,
$\phi_4(x, y, z) = \sin(\underline{k} \cdot \underline{r})$.

Hierbei ist $\underline{r} = (x, y, z)^T$ der Ortsvektor mit Länge $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Vorlesung: Donnerstags 8:30 Uhr – 10:00 Uhr in EW 201.

Scheinkriterien: Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
Mindestens 50% der mündlichen Aufgaben angekreuzt.
Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.
Bestandene Klausur.

Sprechzeiten:

| Name | Tag | Zeit | Raum | Tel. |
|---|---|---|---|---|
| Prof. Holger Stark | FR | 11:30–12:30 Uhr | EW 709 | 29623 |
| Ken Lichtner | FR | 10:00–11:00 Uhr | EW 266 | 28849 |
| Andreas Zöttl | MI | 10:30–11:30 Uhr | EW 702 | 24253 |
| Andrea Vüllings | DI | 14:15–15:15 Uhr | EW 060 | 26143 |
| Benjamin Regler | DO | 13:00–14:00 Uhr | EW 060 | 26143 |
| Christian Fräßdorf | DI | 15:00–16:00 Uhr | EW 060 | 26143 |
| Jan Techter | DO | 12:15–13:15 Uhr | EW 060 | 26143 |

Aktuelle Informationen werden auf der Webseite bekannt gegeben:
*http://www.tu-berlin.de/index.php?id=99451*