Prof. Holger Stark,
Dipl. Phys. Ken Lichtner, Dipl. Ing. Andreas Zöttl,
Andrea Vüllings, Benjamin Regler, Christian Fräßdorf, Jan Techter

11. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

Abgabe: Mo./Di. 27./28. Juni 2011 im Tutorium

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an. Kreuzen Sie am Beginn des Tutoriums die mündlichen Aufgaben an, die Sie bearbeitet haben und an der Tafel vorrechnen können.

Aufgabe 37 (20 Punkte): *Divergenz in Kugelkoordinaten (schriftlich) (10+5+5 Punkte)*

(a) Zeigen Sie, dass die Divergenz $\operatorname{div} \underline{V} \equiv \nabla \cdot \underline{V}$ eines Vektorfeldes $\underline{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) gegeben ist durch

$$\operatorname{div}\underline{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 V_r\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta V_\vartheta\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}.$$

Hinweis: Es gilt $\underline{V} = V_r\underline{e}_r + V_\vartheta\underline{e}_\vartheta + V_\varphi\underline{e}_\varphi$. Beachten Sie, dass die Basisvektoren ortsabhängig sind, d.h. die Ableitungen ungleich Null sind.

(b) Zeigen Sie, daß der Laplaceoperator $\triangle U \equiv \nabla^2 U \equiv \nabla \cdot \nabla U \equiv \operatorname{div}\operatorname{grad} U$ angewendet auf ein Skalarfeld U in Kugelkoordinaten gegeben ist durch

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}$$

Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis aus (a) mit $\underline{V} = \operatorname{grad} U$.

Wir wissen, daß sich das Kraftfeld der Gravitation $\underline{F}_G$ durch ein Potential U darstellen lässt, so dass $\underline{F}_G = -\nabla U$. Ausserdem wird die Kraft durch eine Massendichte ρ hervorgerufen, d.h. $\operatorname{div} F_G = -\gamma\rho$. Somit erhalten wir für das Gravitationspotential die Gleichung (Poisson-Gleichung)

$$\nabla^2 U = \gamma\rho \tag{1}$$

wobei $\gamma = \text{const.}$

(c) Nehmen Sie nun an, dass die Massendichte $\rho = \rho_0 = \text{const}$ ist. Bestimmen Sie damit die Lösung der Gleichung (1). Verwenden Sie dazu einen kugelsymmetrischen Ansatz für das Potential, d.h. $U = U(r)$. Diskutieren Sie die Lösung.
Hinweis: Schreiben Sie Gleichung (1) in Kugelkoordinaten und lösen Sie sie durch zweimaliges Integrieren.

Aufgabe (38): *Rotation von Feldern (mündlich)*

Bestimmen Sie die Rotation $\operatorname{rot}\underline{w} = \nabla \times \underline{w}$ in kartesischen Koordinaten von folgenden Vektorfeldern:

(a) $\underline{w}(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz\cos(xyz) + 2xz \\ xz\cos(xyz) + 2yz^2 \\ xy\cos(xyz) + x^2 + 2y^2 z \end{pmatrix}$

(b) $\underline{v}(x,y,z) = \frac{1}{\rho}\underline{e}_\varphi$
Hinweis: Verwenden Sie $\underline{e}_\varphi = -\sin\varphi\underline{e}_x + \cos\varphi\underline{e}_y$ und $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

Aufgabe (39): *Divergenz und Rotation (mündlich)*
Es sei $\phi(\underline{r})$ ein skalares Feld und $\underline{a}(\underline{r})$ und $\underline{b}(\underline{r})$ Vektorfelder. Zeigen Sie die Gültigleit folgender Identitäten:

(a) $\nabla \cdot (\phi\, \underline{a}) = \phi(\nabla \cdot \underline{a}) + \underline{a} \cdot (\nabla\phi)$

(b) $\nabla \times (\phi\, \underline{a}) = \phi(\nabla \times \underline{a}) + (\nabla\phi) \times \underline{a}$

(c) $\nabla \times (\nabla \times \underline{a}) = \nabla(\nabla \cdot \underline{a}) - \triangle\, \underline{a}$

(d) $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$

(e) $\nabla \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) = \underline{b} \cdot (\nabla \times \underline{a}) - \underline{a} \cdot (\nabla \times \underline{b})$

Hinweis: Verwenden Sie den total antisymmetrischen Tensor ε_{ijk}.

Vorlesung: Donnerstags 8:30 Uhr – 10:00 Uhr in EW 201.

Scheinkriterien: Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
Mindestens 50% der mündlichen Aufgaben angekreuzt.
Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.
Bestandene Klausur.

Sprechzeiten:

Name	**Tag**	**Zeit**	**Raum**	**Tel.**
Prof. Holger Stark	FR	11:30–12:30 Uhr	EW 709	29623
Ken Lichtner	FR	10:00–11:00 Uhr	EW 266	28849
Andreas Zöttl	MI	10:30–11:30 Uhr	EW 702	24253
Andrea Vüllings	DI	14:15–15:15 Uhr	EW 060	26143
Benjamin Regler	DO	13:00–14:00 Uhr	EW 060	26143
Christian Fräßdorf	DI	15:00–16:00 Uhr	EW 060	26143
Jan Techter	DO	12:15–13:15 Uhr	EW 060	26143

Aktuelle Informationen werden auf der Webseite bekannt gegeben:
http://www.tu-berlin.de/index.php?id=99451