Prof. Holger Stark,
Dipl. Phys. Ken Lichtner, Dipl. Ing. Andreas Zöttl,
Andrea Vüllings, Benjamin Regler, Christian Fräßdorf, Jan Techter

3. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

Abgabe: Mo./Di. 02./03. Mai 2011 im Tutorium

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an. Kreuzen Sie am Beginn des Tutoriums die mündlichen Aufgaben an, die Sie bearbeitet haben und an der Tafel vorrechnen können.

Konventionen und Notation:

- Vektor $\underline{v}$ mit Komponenten v_i und Basis $\underline{e}_i$: $\underline{v} = \sum_i v_i \underline{e}_i = v_i \underline{e}_i$
- Die Matrix $\underline{\underline{A}}$ hat die Einträge A_{ij}.
- Skalarprodukt zwischen Vektoren $\underline{v}$ und $\underline{w}$: $\underline{v} \cdot \underline{w} = \sum_i v_i w_i = v_i w_i$
- Die Multiplikation einer Matrix $\underline{\underline{A}}$ mit einem Vektor $\underline{v}$ ergibt einen Vektor $\underline{u}$:
  $\underline{u} = \underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \sum_{ij} A_{ij} v_j \underline{e}_i = A_{ij} v_j \underline{e}_i$ bzw. für die Komponenten $u_i = \sum_j A_{ij} v_j = A_{ij} v_j$
- Die Multiplikation zwischen zwei Matrizen $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{B}}$ ergibt die Matrix $\underline{\underline{C}}$:
  $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ bzw. in Komponentenschreibweise $C_{ij} = A_{ik} B_{kj}$.

Aufgabe 8 (5 Punkte): *Eigenschaften der Spur (schriftlich)*

Gegeben sind die Matrizen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

und $s, t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie durch explizites Ausrechnen, dass die folgenden Spureigenschaften gelten:

$$\mathsf{Spur}(s\,\underline{\underline{A}} + t\,\underline{\underline{B}}) = s\,\mathsf{Spur}\underline{\underline{A}} + t\,\mathsf{Spur}\underline{\underline{B}},$$
$$\mathsf{Spur}(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = \mathsf{Spur}(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}).$$

Aufgabe 9 (15 Punkte): *Indexschreibweise und ε-Symbol (schriftlich)*
Es sind die Vektoren $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$ und die Matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben. Zeigen Sie, dass

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{\underline{A}}\ (\underline{a} \times \underline{b}) = (\underline{b} \cdot \underline{\underline{A}}\ \underline{a} + \underline{a} \cdot \underline{\underline{A}}\ \underline{b})(\underline{a} \cdot \underline{b}) - b^2 (\underline{a} \cdot \underline{\underline{A}}\ \underline{a}) - a^2 (\underline{b} \cdot \underline{\underline{A}}\ \underline{b}) + (\mathsf{Spur}\underline{\underline{A}}) \left[a^2 b^2 - (\underline{a} \cdot \underline{b})^2\right],$$

wobei $a = |\underline{a}|$ und $b = |\underline{b}|$ die Längen der Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ sind.
Hinweis: Schreiben Sie den Ausdruck mit Hilfe zweier ε-Tensoren und verwenden Sie die Identität

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km}.$$

Aufgabe (10): *Spatprodukt und Matrixprodukt (mündlich)*

(a) Berechnen Sie das Spatprodukt $\underline{u} \cdot (\underline{v} \times \underline{w})$ der Vektoren $\underline{u} = (1, 4, -3)$, $\underline{v} = (-2, 3, -1)$, $\underline{w} = (2, 3, 2)$.

(b) Berechnen Sie das Matrixprodukt zwischen den Matrizen

$$\underline{\underline{A}}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 9 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{A}}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 9 \\ -1 & -1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

3. Übung MM SoSe 11

Aufgabe (11): *Länge und Winkel von Vektoren (mündlich)*
Berechnen Sie die Länge des Vektors $\underline{u} = \underline{e}_1 + 4\underline{e}_2 \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie nun den Vektor

$$\underline{\tilde{u}} = \underline{\underline{D}}\,\underline{u},$$

wobei

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie die Länge von $\underline{\tilde{u}}$ sowie den Winkel α zwischen $\underline{u}$ und $\underline{\tilde{u}}$. Welche Bedeutung hat die Matrix $\underline{\underline{D}}$?

Aufgabe (12): *Pauli-Matrizen (mündlich)*
Gegeben seien die Pauli-Matrizen

$$\underline{\underline{\sigma}}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\sigma}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\sigma}}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

wobei $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Diese sind in der Quantenmechanik Darstellungen des Drehimpulsoperators im Raum der Spin-1/2-Zustände, beispielsweise von Elektronen.

(a) Zeigen Sie die Relation

$$\underline{\underline{\sigma}}_k \underline{\underline{\sigma}}_j = \delta_{kj}\underline{\underline{1}} + \mathrm{i}\,\epsilon_{kjl}\,\underline{\underline{\sigma}}_l\,, \quad k, j \in \{1, 2, 3\}\,,$$

wobei $\underline{\underline{1}}$ die 3-dimensionale Einheitsmatrix ist.

(b) Der Kommutator zweier Matrizen $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}$ ist definiert als

$$[\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}] = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} - \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}.$$

Zeigen Sie, dass $[\underline{\underline{\sigma}}_k, \underline{\underline{\sigma}}_j] = 2\mathrm{i}\,\epsilon_{kjl}\,\underline{\underline{\sigma}}_l$ für $k, j \in \{1, 2, 3\}$.

Vorlesung: Donnerstags 8:30 Uhr – 10:00 Uhr in EW 201.

Scheinkriterien:
Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
Mindestens 50% der mündlichen Aufgaben angekreuzt.
Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.
Bestandene Klausur.

Sprechzeiten:

Name	**Tag**	**Zeit**	**Raum**	**Tel.**
Prof. Holger Stark	FR	11:30–12:30 Uhr	EW 709	29623
Ken Lichtner	FR	10:00–11:00 Uhr	EW 266	28849
Andreas Zöttl	MI	10:30–11:30 Uhr	EW 702	24253
Andrea Vüllings	MO	14:15–15:15 Uhr	EW 060	26143
Benjamin Regler	DO	13:00–14:00 Uhr	EW 060	26143
Christian Fräßdorf	DI	15:00–16:00 Uhr	EW 060	26143
Jan Techter	DI	10:15–11:15 Uhr	EW 060	26143

Aktuelle Informationen werden auf der Webseite bekannt gegeben:
http://www.tu-berlin.de/index.php?id=99451