

Prof. Holger Stark,  
 Dipl. Phys. Ken Lichtner, Dipl. Ing. Andreas Zöttl,  
 Andrea Vüllings, Benjamin Regler, Christian Fräßdorf, Jan Techter

## 5. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

### Abgabe: Mo./Di. 16./17. Mai 2011 im Tutorium

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an. Kreuzen Sie am Beginn des Tutoriums die mündlichen Aufgaben an, die Sie bearbeitet haben und an der Tafel vorrechnen können.

#### Aufgabe 16 (20 Punkte): Taylorpolynome und Taylorreihen

Funktionen  $f(x)$  lassen sich mit Hilfe der Basis  $\{1, x - x_0, (x - x_0)^2, \dots\}$  in eine *Taylorreihe*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

mit den Koeffizienten  $a_k$  um den Punkt  $x_0$  entwickeln.

(a) Zeigen Sie, dass die Koeffizienten  $a_k$  durch den Ausdruck

$$(1) \quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

gegeben sind, wobei  $f^{(k)}(x_0)$  die  $k$ -te Ableitung ausgewertet an der Stelle  $x = x_0$  bedeutet und  $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$ .

*Hinweis:* Berechnen Sie  $f^{(k)}(x_0)$  und vergleichen Sie mit Formel (1).

(b) Das *Taylorpolynom  $n$ -ten Grades*  $f_n(x)$

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

stellt eine Näherung für die Funktion  $f(x)$  um den Entwicklungspunkt  $x_0$  dar. Berechnen Sie  $\sin_{(n)}(x)$  und  $\cos_{(n)}(x)$  um den Punkt  $x_0 = 0$  bis zur Ordnung  $n = 8$ . Zeigen Sie, dass Ihr Ergebnis mit

$$\sin_{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n/2-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \cos_{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

übereinstimmt. *Anmerkung:* Exakt lassen sich  $\sin(x)$  und  $\cos(x)$  darstellen durch

$$(2) \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

(c) Plotten Sie  $\sin_{(n)}(x)$  und  $\cos_{(n)}(x)$  für alle  $n \leq 8$ . *Hinweis:* Verwenden Sie z.B. das Computerprogramm *Mathematica* oder plotten Sie online auf [www.wolframalpha.com](http://www.wolframalpha.com). Zum plotten verwenden Sie den Befehl `Plot[f(x), {x, xmin, xmax}]`.

(d) Bestimmen Sie die Taylorpolynome folgender Funktionen um den Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  bis zur Ordnung  $n = 2$ :

- |  |                                   |
|--|-----------------------------------|
| (i) $f(x) = (1 \pm x)^a, \quad a \in \mathbb{R}$ | (iii) $f(x) = 1/\sqrt{1 \pm x^2}$ |
| (ii) $f(x) = \ln(1 \pm x)$                       | (iiii) $f(x) = \tan x$            |

5. Übung MM SoSe 11

**Aufgabe (17): Komplexe Zahlen**

(a) Es sind folgende komplexe Zahlen gegeben (mit  $i^2 = -1$ ):

$$z_1 = 3 - 4i, \quad z_2 = 3i, \quad z_3 = 2 + i$$

Zeichnen Sie  $z_1$ ,  $z_2$  und  $z_3$  in der komplexen Ebene. Berechnen Sie den Betrag von  $z_1$ ,  $z_2$  und  $z_3$  und schreiben Sie sie in der Polardarstellung  $z = re^{i\phi}$  wobei  $r = \sqrt{zz^*}$ .

(b) Berechnen Sie die Taylorreihe von  $f(x) = e^x$  um die Stelle  $x_0 = 0$  und zeigen Sie unter Verwendung von Formel (2), dass folgende Beziehung gilt:

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi.$$

Was ist die konjugiert komplexe Zahl zu  $e^{i\phi}$ ? Welchen Betrag hat  $e^{i\phi}$ ?

**Aufgabe (18): Determinanten**

Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

*Hinweis:* Es ist einfacher zuerst die Determinante von  $\underline{\underline{B}}\underline{\underline{B}}^T$  zu bestimmen.

**Vorlesung:** Donnerstags 8:30 Uhr – 10:00 Uhr in EW 201.

**Scheinkriterien:** Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.  
Mindestens 50% der mündlichen Aufgaben angekreuzt.  
Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.  
Bestandene Klausur.

<b>Sprechzeiten:</b>	<b>Name</b>	<b>Tag</b>	<b>Zeit</b>	<b>Raum</b>	<b>Tel.</b>
	Prof. Holger Stark	FR	11:30–12:30 Uhr	EW 709	29623
	Ken Lichtner	FR	10:00–11:00 Uhr	EW 266	28849
	Andreas Zöttl	MI	10:30–11:30 Uhr	EW 702	24253
	Andrea Vüllings	MO	14:15–15:15 Uhr	EW 060	26143
	Benjamin Regler	DO	13:00–14:00 Uhr	EW 060	26143
	Christian Fräbldorf	DI	15:00–16:00 Uhr	EW 060	26143
	Jan Techter	DI	12:15–13:15 Uhr	EW 060	26143

Aktuelle Informationen werden auf der Webseite bekannt gegeben:  
<http://www.tu-berlin.de/index.php?id=99451>