Prof. Holger Stark,
Dipl. Phys. Ken Lichtner, Dipl. Ing. Andreas Zöttl,
Andrea Vüllings, Benjamin Regler, Christian Fräßdorf, Jan Techter

6. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

Abgabe: Mo./Di. 23./24. Mai 2011 im Tutorium

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an. Kreuzen Sie am Beginn des Tutoriums die mündlichen Aufgaben an, die Sie bearbeitet haben und an der Tafel vorrechnen können.

Aufgabe 19 (10 Punkte): *Trägheitstensor I (schriftlich)*

Wir betrachten einen starren Körper, der aus N fest verbundenen Massepunkten zusammengesetzt ist. Dieser rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$, das heißt, er rotiert entgegen dem Uhrzeigersinn um die durch die Richtung von $\underline{\omega}$ definierte Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} = \omega = |\underline{\omega}|$. Der Gesamtdrehimpuls ist dann gegeben als

$$\underline{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_i), \tag{1}$$

wobei $\underline{r}_i = (x_i, y_i, z_i)^T$ der Ort des i-ten Massepunktes ist. $\underline{\omega} \times \underline{r}$ ist gerade die Geschwindigkeit am Ort $\underline{r}$. In Analogie zum Impuls eines Teilchens $\underline{p} = m\underline{v}$ kann Gleichung (1) auch geschrieben werden als

$$\underline{L} = \underline{\underline{\Theta}}\, \underline{\omega}. \tag{2}$$

Hierbei bezeichnet $\underline{\underline{\Theta}}$ den Trägheitstensor. Zeigen Sie durch den Vergleich der Gleichungen (1) und (2), dass die Komponenten des Trägheitstensors gegeben sind durch

$$\Theta_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left((\underline{r}_i)^2 \delta_{\alpha\beta} - (\underline{r}_i)_\alpha (\underline{r}_i)_\beta\right) \qquad \text{für } \alpha, \beta = 1, 2, 3. \tag{3}$$

Aufgabe 20 (10 Punkte): *Transformationsverhalten von Tensoren (schriftlich)*

Ist $\underline{\underline{T}}$ ein Tensor mit den Matrixkomponenten T_{ij} und $\underline{\underline{D}}$ eine orthogonale Transformation, dann gilt für die Tensorkomponenten der Transformierten:

$$T'_{ij} = \underline{e}'_i \cdot \underline{\underline{T}}\, \underline{e}'_j = T_{kl} D_{ik} D_{jl}, \tag{4}$$

wobei $D_{ij} = \underline{e}'_i \cdot \underline{e}_j$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$T_{ij} = D^t_{ik} D^t_{jl} T'_{kl}. \tag{5}$$

Aufgabe (21): *Trägheitstensor II (mündlich)*

Stellen Sie sich nun einen starren Körper vor, bestehend aus vier miteinander verbundenen Kugeln. Die Massen der Kugeln sollen viel grösser sein, als die der Verbundungsstücke, so dass die Masse der Verbindungen vernachlässigt und die Kugelmasse sich in einem Punkt konzentriert gedacht wird. Die Massenpunkte werden als Abstand vom Koordinatenursprung mit Hilfe der folgenden Vektoren beschrieben:

$$\underline{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha \underline{e}_1 - \alpha \underline{e}_2), \;\; \underline{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\alpha \underline{e}_1 + \alpha \underline{e}_2), \tag{6}$$

$$\underline{r}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}((1-\alpha)\underline{e}_1 + (1-\alpha)\underline{e}_2), \;\; \underline{r}_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}((1-\alpha)\underline{e}_1 + (1-\alpha)\underline{e}_2) \tag{7}$$

(a) Bestimmen Sie alle Komponenten des Trägheitstensors, wenn alle Massenpunkte die Masse m haben.

(b) Betrachten Sie die folgenden Winkelgeschwindigkeiten: $\underline{\omega}_1 = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3$, $\underline{\omega}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 + \underline{e}_2)$, $\underline{\omega}_3 = \underline{e}_1 + \underline{e}_3$. Für welche Winkelgeschwindigkeiten liegt $\underline{\omega}$ parallel zum Drehimpuls $L_i = \theta_{ij}\omega_j$?

(c) Für welche Werte von α wird der Trägheitstensor diagonal?

(d) Jetzt wird der starre Körper um $\pi/4$ gedreht. Die Vektoren $\underline{r}_i$, $i = 1 \ldots 4$, schreiben sich nach der Drehung als:

$$\underline{r}'_1 = \alpha\underline{e}_1, \ \underline{r}'_2 = -\alpha\underline{e}_1, \ \underline{r}'_3 = (1-\alpha)\underline{e}_2 \ \underline{r}'_4 = -(1-\alpha)\underline{e}_2 \tag{8}$$

Bestimmen Sie erneut alle Komponenten des Trägheitstensors. Setzen Sie für α den in (c) bestimmten Wert ein. Was beobachten Sie?

Aufgabe (22): *Eigenwertproblem (mündlich)*
Gegeben sei die Matrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des charakteristischen Polynoms

$$\chi(\lambda) = \text{det}\left[\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{1}}\right]$$

die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix.

(b) Berechnen Sie Spur und Determinante der Matrix. Sehen Sie einen Zusammenhang zu den Eigenwerten?

Vorlesung: Donnerstags 8:30 Uhr – 10:00 Uhr in EW 201.

Scheinkriterien: Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
Mindestens 50% der mündlichen Aufgaben angekreuzt.
Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.
Bestandene Klausur.

Sprechzeiten:

Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.
Prof. Holger Stark	FR	11:30–12:30 Uhr	EW 709	29623
Ken Lichtner	FR	10:00–11:00 Uhr	EW 266	28849
Andreas Zöttl	MI	10:30–11:30 Uhr	EW 702	24253
Andrea Vüllings	DI	14:15–15:15 Uhr	EW 060	26143
Benjamin Regler	DO	13:00–14:00 Uhr	EW 060	26143
Christian Fräßdorf	DI	15:00–16:00 Uhr	EW 060	26143
Jan Techter	DI	12:15–13:15 Uhr	EW 060	26143

Aktuelle Informationen werden auf der Webseite bekannt gegeben:
http://www.tu-berlin.de/index.php?id=99451