Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 20. Mai 2011

Prof. Holger Stark,
Dipl. Phys. Ken Lichtner, Dipl. Ing. Andreas Zöttl,
Andrea Vüllings, Benjamin Regler, Christian Fräßdorf, Jan Techter

7. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

Abgabe: Mo./Di. 30./31. Mai 2011 im Tutorium

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an. Kreuzen Sie am Beginn des Tutoriums die mündlichen Aufgaben an, die Sie bearbeitet haben und an der Tafel vorrechnen können.

Aufgabe 23 (10 Punkte): *Leitfähigkeitstensor (schriftlich) (3+4+3 Punkte)*

Die Stromdichte in einem Metall wird beschrieben durch das Ohmsche Gesetz:

$$\underline{j} = \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{E}\,.$$

Dabei ist $\underline{j}$ die Stromdichte, $\underline{\underline{\sigma}}$ der Leitfähigkeitstensor und $\underline{E}$ das elektrische Feld. Experimentell kann der Leitfähigkeitstensor durch drei Messungen bestimmt werden. Dabei wird jeweils in x-, y- und z-Richtung ein elektrisches Feld angelegt und jeweils der auftretende Strom gemessen. Beim angelegten elektrischen Feld in x-Richtung ($\underline{E} = E_0\underline{e}_x$) wurde die Stromdichte $\underline{j} = j_0(4\underline{e}_x + 3\underline{e}_y)$ gemessen, bei einem Feld in y-Richtung ($\underline{E} = E_0\underline{e}_y$) die Stromdichte $\underline{j} = j_0(3\underline{e}_x + 4\underline{e}_y)$ und bei einem Feld in z-Richtung ($\underline{E} = E_0\underline{e}_z$) die Stromdichte $\underline{j} = 5j_0\underline{e}_z$.

(a) Geben Sie die Einträge σ_{ij} des Leitfähigkeitstensors an.

(b) Um den Tensor zu diagonalisieren, dreht man das Koordinatensystem um die z-Achse mit dem Winkel φ. Bestimmen Sie den Drehwinkel, mit dem der Tensor diagonal wird.

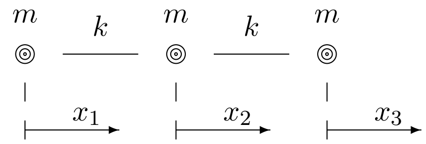
(c) In welche Richtung $\underline{\hat{n}}$ muss man das elektrische Feld $\underline{E} = E_0\underline{\hat{n}}$ legen, damit die Stromdichte maximal wird. Wie lautet $|\underline{j}_{max}|$?
Hinweis: Der maximale Strom fließt in entlang des Eigenvektors mit dem betragsmäßig größten Eigenwert.

Aufgabe 24 (10 Punkte): *Molekülschwingungen (schriftlich) (3+5+2 Punkte)*

Ein einfaches Modell für ein dreiatomiges Molekül ist eine lineare Anordnung dreier Massepunkte (Masse m), die durch masselose Federn (Federkonstante k) miteinander verbunden sind.

(a) Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 + kx_2, \\ m\ddot{x}_2 &= kx_1 - 2kx_2 + kx_3, \\ m\ddot{x}_3 &= kx_2 - kx_3. \end{aligned}$$



Setzen Sie den Lösungsansatz $x_j = A_j \sin(\omega t)$ in die Bewegungsgleichungen ein und schreiben Sie die Gleichungen als Eigenwertproblem

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{A} = \omega^2\underline{A},$$

wobei $\underline{A} = (A_1, A_2, A_3)$ der Eigenvektor und ω^2 der Eigenwert ist.

(b) Berechnen Sie die Eigenfrequenzen $\omega^{(\alpha)}$ und Eigenvektoren $\underline{A}^{(\alpha)}$.

(c) Diskutieren Sie die 3 Eigenschwingungen $x_j^{(\alpha)}(t)$.

Aufgabe (25): *Kugelkoordianten (mündlich)*
Der Ortsvektor $\underline{r}$ lautet in Kugelkoordinaten (r, θ, φ):

$$\underline{r} = r \sin\theta \cos\varphi \underline{e}_x + r \sin\theta \sin\varphi \underline{e}_y + r \cos\theta \underline{e}_z.$$

(a) Berechnen Sie die Koordinatenbasis $\{\underline{e}_r(\theta,\varphi), \underline{e}_\theta(\theta,\varphi), \underline{e}_\varphi(\theta,\varphi)\}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$ für $i, j = r, \theta, \varphi$.

Aufgabe (26): *Legendrepolynome als Eigenvektoren (mündlich)*
Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $\mathcal{P}^n[-1,1]$ der Polynome bis zum Grad n auf dem Intervall $[-1,1]$. Auf diesem Raum definieren wir die Abbildung

$$L(x)p(x) := \left[(x^2-1)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right] p(x).$$

(a) Zeigen Sie, dass für eine differenzierbare Funktion $f(x)$ gilt:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(xf(x)) = x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}f(x) + n\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}f(x). \tag{1}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Legendrepolynome $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left[(x^2-1)^l\right]$ für $l = 0, \ldots, n$ Eigenvektoren von L sind (d.h. es gilt $LP_l = \lambda_l P_l$). Benutzen Sie dazu Formel (1). Berechnen Sie die zugehörigen Eigenwerte λ_l.

Vorlesung: Donnerstags 8:30 Uhr – 10:00 Uhr in EW 201.

Scheinkriterien: Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
Mindestens 50% der mündlichen Aufgaben angekreuzt.
Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.
Bestandene Klausur.

Sprechzeiten:

Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.
Prof. Holger Stark	FR	11:30–12:30 Uhr	EW 709	29623
Ken Lichtner	FR	10:00–11:00 Uhr	EW 266	28849
Andreas Zöttl	MI	10:30–11:30 Uhr	EW 702	24253
Andrea Vüllings	DI	14:15–15:15 Uhr	EW 060	26143
Benjamin Regler	DO	13:00–14:00 Uhr	EW 060	26143
Christian Fräßdorf	DI	15:00–16:00 Uhr	EW 060	26143
Jan Techter	DO	12:15–13:15 Uhr	EW 060	26143

Aktuelle Informationen werden auf der Webseite bekannt gegeben:
http://www.tu-berlin.de/index.php?id=99451