

Prof. Dr. Harald Engel,  
 Dipl. Phys. Stefan Fruhner, Dipl. Ing. Maximilian Schmitt  
 Tanja Schlemm, Jan Techter, Anke Zimmermann

## 1. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

**Abgabe: Di. 26.04.2011 8:15 Briefkasten ER-Geb./online über ISIS (max. 1MB)**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

**Aufgabe 1 (4 Punkte):** Kontinuitätsgleichung

Leiten Sie aus der Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + U(x)\Psi(x, t)$$

für die eindimensionale Bewegung eines quantenmechanischen Teilchens im Potential  $U(x)$  die Kontinuitätsgleichung  $\frac{\partial}{\partial t}(\Psi^*\Psi) + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$  her. Überzeugen Sie sich davon, dass der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeitsstromdichte  $j = \frac{\hbar}{2mi} (\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x})$  ist.

**Aufgabe 2 (8 Punkte):** Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation bildet eine große Klasse von Funktionen  $f(x)$  auf andere Funktionen  $g(k)$  ab. Sie bewirkt dabei einen Darstellungswechsel zwischen den Variablen  $x$  und  $k$ . Anschaulich kann man die Fourier-Transformation als eine Zerlegung der Funktion  $f(x)$  in (ebene) Wellen ansehen, die Funktion  $g(k)$  gibt dabei die Amplitude der zur Wellenzahl  $k$  gehörenden Welle an. Da ebene Wellen in vielen physikalischen Theorien einfache Lösungen der zugrundeliegenden Differentialgleichungen sind, findet die Fourier-Transformation zahlreiche Anwendungen. Die Definition der Fourier-Transformation ist:

$$g(k) = \mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx ,$$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk .$$

(a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von  $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ .

(b) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Gaußverteilung mit Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$ :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} .$$

Diskutieren Sie kurz den Zusammenhang zwischen der Gaußfunktion und ihrer Fourier-Transformierten und vergleichen Sie die entsprechenden Halbwertsbreiten.

(c) Zeigen Sie, dass für die Fourier-Transformierte der Ableitung einer Funktion gilt:

$$\mathcal{F}(f') = ik\mathcal{F}(f) .$$

$f(x)$  sei dabei eine beliebig oft differenzierbare Funktion, die ebenso wie alle ihre Ableitungen für  $|x| \rightarrow \infty$  schneller verschwindet als jede Potenz von  $x$ .

**Aufgabe 3 (8 Punkte):** Wellenpaket

Zur Zeit  $t = 0$  sei der Zustand eines freien Teilchens (d.h.  $U(x) = 0$ ) in einer Dimension durch die Wellenfunktion

$$\Psi(x, 0) = N e^{-\frac{x^2}{2a^2}} e^{ip_0 x}$$

beschrieben.  $N$  ist ein Normierungsfaktor.

1. Übung TPII SS11

- (a) Bestimmen Sie  $N$  aus der Normierungsbedingung  $\int_{-\infty}^{\infty} dx |\Psi(x, 0)|^2 = 1$ .
- (b) Bestimmen Sie die Zeitentwicklung der Wellenfunktion  $\Psi(x, t)$  für  $t \geq 0$  indem Sie die Schrödingergleichung eines freien Teilchens in einer Dimension lösen:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2}.$$

Verwenden Sie Aufgabenteil 2 (c), um aus der partiellen Schrödingergleichung eine gewöhnliche Differentialgleichung zu erhalten.

*Hinweis:* Auf der Webseite des Projekts **Offensive Wissen durch Lernen (OWL)** auf

[www.tu-berlin.de/?8118](http://www.tu-berlin.de/?8118)

finden Sie ein Applet zum Wellenpaket.

Achtung! Die Anmeldung zu den Tutorien endet am Mittwoch den 13.04.2011 um 23:59. Anmelden muss man sich auf:

<https://moseskonto.tu-berlin.de/moseskonto>

Aktuelle Informationen werden auf der Webseite bekannt gegeben. Diese ist zu erreichen über

<http://www.tu-berlin.de/?98665>

Wochenplan

|       | <b>Di</b>       | <b>Mi</b>     | <b>Do</b>     | <b>Fr</b>     |
|-------|-----------------|---------------|---------------|---------------|
| 8-10  | VL EW 203       | VL EW 202     | Tut EW 229 TS |               |
| 10-12 | Tut H 2033 JT   |               | Tut EW 226 TS | Tut EW 016 JT |
| 12-14 | Tut EB 133C M/S | Tut EW 226 AZ |               |               |
| 14-16 | Tut ER 164 M/S  |               | Tut EW 184 AZ |               |

M/S – Max Schmitt/Stefan Fruhner, TS – Tanja Schlemm, JT – Jan Techter, AZ – Anke Zimmermann

| Sprechzeiten: | <b>Name</b>        | <b>Tag</b> | <b>Zeit</b> | <b>Raum</b> | <b>Tel.</b> |
|---------------|--------------------|------------|-------------|-------------|-------------|
|               | Prof. Dr. H. Engel | Mi.        | 14:30-16:00 | EW 738      | 79462       |
|               | Stefan Fruhner     | Fr.        | 13:30-14:30 | EW 627/28   | 27681       |
|               | Max Schmitt        | Do.        | 10:00-11:00 | EW 708      | 25225       |
|               | Tanja Schlemm      | Fr.        | 11:00-12:00 | EW 060      | 26143       |
|               | Jan Techter        | Mo.        | 10:00-11:00 | EW 060      | 26143       |
|               | Anke Zimmermann    | Di.        | 12:00-13:00 | EW 060      | 26143       |