

Prof. Dr. Harald Engel,  
 Dipl. Phys. Stefan Fruhner, Dipl. Ing. Maximilian Schmitt  
 Tanja Schlemm, Anke Zimmermann

## 2. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

**Abgabe: Di. 03.05.2011 8:15 Briefkasten ER-Geb./online über ISIS (max. 1MB)**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

**Aufgabe 4 (12 Punkte):** Kastenpotential mit endlich hohen Wänden

Gegeben sei ein Potential  $V(x)$  durch

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & , \quad -L < x < L \\ 0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Da hier nur gebundene Zustände betrachtet werden, ist  $-V_0 < E < 0$ . Zur Abkürzung seien

$$\kappa^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2} \quad \text{und} \quad k^2 = \frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2}.$$

(a) Analytische Lösung

- (1) Lösen Sie für diesen Fall die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung durch geeignete Ansätze für die drei Bereiche des Potentials. Benutzen Sie dabei die Rand- und Stetigkeitsbedingungen zur Reduzierung der auftretenden Konstanten. Behandeln Sie dabei symmetrische und antisymmetrische Lösungen getrennt. Zeigen Sie, dass zur Bestimmung der Energie die transzendenten Gleichungen

$$\begin{aligned} * \quad \kappa &= k \tan(kL) \quad (\text{symmetrische Lösung}) \\ * \quad \kappa &= -k \cot(kL) \quad (\text{antisymmetrische Lösung}) \end{aligned}$$

zu erfüllen sind und geben Sie die (normierten) Wellenfunktionen an.

- (2) Die in (a) auftretenden Gleichungen lassen sich analytisch nicht lösen. Grafisch kann man jedoch Aussagen über Anzahl und Größe der Energieeigenwerte in Abhängigkeit von der Tiefe  $V_0$  und der Breite des Kastens machen. Bestimmen Sie die (diskreten) Energieeigenwerte  $E_n$ . Zeigen Sie zunächst, dass gilt:

$$k = \frac{n\pi}{2a} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

*Hinweis:* Sie erhalten eine zusätzliche Gleichung zur Bestimmung von  $k$  und  $\kappa$ , indem Sie  $(kL)^2 + (\kappa L)^2$  betrachten.

- (3) Plotten Sie die Energie in Abhängigkeit der Breite des Kastens und untersuchen Sie das Verhalten für  $L \rightarrow 0$  und  $L \rightarrow \infty$ .
- (4) Stellen Sie die Wellenfunktionen für die untersten vier Energieeigenwerte grafisch dar.
- (b) Numerische Wellenfunktionen Im Grenzfall  $V_0 \rightarrow \infty$  verschwindet die Aufenthaltswahrscheinlichkeit an den Rändern des Kastens ( $\psi(L) = \psi(-L) = 0$ ). Mit Hilfe des Computeralgebra-Programmes *Mathematica* lassen sich die Lösungen der Schrödingergleichung *numerisch* bestimmen. Bestimmen Sie die ersten drei Energieeigenwerte mit Hilfe eines *Shooting-Verfahrens* ([http://en.wikipedia.org/wiki/Shooting\\_method](http://en.wikipedia.org/wiki/Shooting_method)) und stellen Sie die zugehörigen Wellenfunktionen grafisch dar. Setzen Sie der Einfachheit halber  $\hbar = 1, m = 1$  und  $L = 1$  und wählen Sie die Anfangswerte  $\psi(-L) = 0$  und  $\psi'(-L) = \text{const.}$

**Bitte Rückseite beachten! →**

2. Übung TPII SS11

**Aufgabe 5 (8 Punkte):  $\delta$ -Potential**

Betrachten Sie als Grenzfall für einen unendlich schmalen Kasten das Potential

$$V(x) = -V_0\delta(x), \quad V_0 > 0.$$

Berechnen Sie die normierten Eigenfunktionen für die gebundenen Zustände ( $E < 0$ ). Geben Sie die Energieeigenwerte an. Wie viele gibt es insgesamt?

*Hinweis:* Nehmen Sie an, dass  $\psi'(x)$  an der Stelle  $x = 0$  höchstens eine endliche Diskontinuität aufweist und werten Sie das Integral  $\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \psi(x)dx = 0$  für  $\epsilon \rightarrow 0$  aus.

Aktuelle Informationen werden auf der Webseite bekannt gegeben. Diese ist zu erreichen über

<http://www.tu-berlin.de/?98665>

Wochenplan

	<b>Di</b>	<b>Mi</b>	<b>Do</b>
8-10	VL EW 203	VL EW 202	
10-12	Tut H 2033 TS		Tut EW 226 TS
12-14	Tut EB 133C M/S	Tut EW 226 AZ	
14-16	Tut ER 164 M/S		Tut EW 184 AZ

M/S – Max Schmitt/Stefan Fruhner, TS – Tanja Schlemm, AZ – Anke Zimmermann

Sprechzeiten:	<b>Name</b>	<b>Tag</b>	<b>Zeit</b>	<b>Raum</b>	<b>Tel.</b>
	Prof. Dr. H. Engel	Mi.	14:30-16:00	EW 738	79462
	Stefan Fruhner	Fr.	13:30-14:30	EW 627/28	27681
	Max Schmitt	Do.	10:00-11:00	EW 708	25225
	Tanja Schlemm	Fr.	11:00-12:00	EW 060	26143
	Anke Zimmermann	Di.	12:00-13:00	EW 060	26143