Prof. Dr. Harald Engel,
Dipl. Phys. Stefan Fruhner, Dipl. Ing. Maximilian Schmitt
Tanja Schlemm, Anke Zimmermann

3. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Di. 10.05.2011 8:15 Briefkasten ER-Geb./online über ISIS (max. 1MB)
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 6 (10 Punkte): *Tunneleffekt am Potentialwall*

Gegeben sei ein Potential $V(x)$ durch

$$V(x) = \begin{cases} 0\,, & x < 0 \\ V_0\,, & 0 < x < L \\ 0\,, & x > L \end{cases} \quad .$$

(a) Berechnen Sie den Reflexionskoeffizienten R und Transmissionskoeffizienten T für ein einfallendes Teilchen, das aus dem negativen Unendlichen kommt. Nehmen Sie dazu an, dass für die Energie des Teilchens $E > V_0$ gilt. Zeigen Sie außerdem, dass $T + R = 1$. Warum muss dies gelten?

(b) Berechnen Sie T für den Fall, dass $E < V_0$.

Hinweis: Zur Lösung der Gleichungssysteme bietet es sich an Mathematica zu verwenden. In diesem Fall den Quellcode bitte mit abgeben.
Hinweis: Auf der Webseite des Projekts **Offensive Wissen durch Lernen** (OWL) auf

`www.tu-berlin.de/?8118`

finden Sie ein interaktives Mathematica Notebook zur Streuung am Potentialwall.

Aufgabe 7 (10 Punkte): *Quantenmechanische Erwartungswerte*
Der Erwartungswert einer Ortskoordinate in einem durch Ψ beschriebenen Zustand ist

$$\langle x \rangle_\Psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x|\Psi(x,t)|^2 dx$$

wobei die Verteilungsfunktion $|\Psi(x,t)|^2$ die normierte Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist. Wir lassen im Folgenden den Index Ψ und die Kennzeichung der Zeitabhängigkeit weg. Das Moment der Ordung n von x ist definiert als $\langle x^n \rangle$. Der Erwartungswert ist also das erste Moment.

(a) Zeigen Sie, dass:

$$\langle x^n \rangle = \frac{\sqrt{2\pi}}{(-i)^n} \frac{d^n}{dk^n}\bigg|_{k=0} \mathcal{F}(|\Psi(x,t)|^2), \quad n \geq 1 \;,$$

wobei $\mathcal{F}(f(x,t)) = g(k,t)$ die Fouriertransformation ist.

(b) Berechnen Sie damit den Erwartungswert des Ortes $\langle x \rangle$ sowie die Standardabweichung $\sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ für das Wellenpaket aus Aufgabe 3.
Hinweis: Verwenden Sie

$$|\Psi(x,t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}A(t)} exp\left(-\frac{(x - \frac{\hbar p_0}{m}t)^2}{2A(t)^2}\right)$$

mit $A(t) = a\sqrt{1/2 + \hbar t^2/(2m^2a^4)}$.

Bitte Rückseite beachten!⟶

Nun betrachten wir Erwartungswerte einer allgemeinen Observablen $F(\mathbf{x})$:

$$\langle F(\mathbf{x})\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{x})|\Psi(\mathbf{x},t)|^2 d^3x \tag{1}$$

(c) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass wenn die Observable auch von den Impulsen abhängt $F = F(\mathbf{x},\mathbf{p})$, sie zu einem Operator wird $\hat{F} = \hat{F}(\mathbf{x}, -i\hbar\nabla)$. Der Erwartungswert muss jedoch stets eine reele Größe sein. Erfüllt Definition (1) diese Bedingung?

(d) Verwenden Sie nun den Ausdruck

$$\langle \hat{F}(\mathbf{x}, -i\hbar\nabla)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(\mathbf{x},t)\hat{F}(\mathbf{x}, -i\hbar\nabla)\Psi(\mathbf{x},t) d^3x \ ,$$

und zeigen Sie, dass $\langle \hat{F}(\mathbf{x}, -i\hbar\nabla)\rangle \in \mathbb{R}$ für

(i) $\hat{F} = \mathbf{x}$,
(ii) $\hat{F} = -i\hbar\nabla$.

Aktuelle Informationen werden auf der Webseite bekannt gegeben. Diese ist zu erreichen über

`http://www.tu-berlin.de/?98665`

Wochenplan

	Di	**Mi**	**Do**
8-10	VL EW 203	VL EW 202	
10-12	Tut H 2033 TS		Tut EW 226 TS
12-14	Tut EB 133C M/S	Tut EW 226 AZ	
14-16	Tut ER 164 M/S		Tut EB 417 AZ

M/S – Max Schmitt/Stefan Fruhner, TS – Tanja Schlemm, AZ – Anke Zimmermann

Sprechzeiten:

Name	**Tag**	**Zeit**	**Raum**	**Tel.**
Prof. Dr. H. Engel	Mi.	14:30-16:00	EW 738	79462
Stefan Fruhner	Fr.	13:30-14:30	EW 627/28	27681
Max Schmitt	Do.	10:00-11:00	EW 708	25225
Tanja Schlemm	Fr.	11:00-12:00	EW 060	26143
Anke Zimmermann	Di.	12:00-13:00	EW 060	26143