Prof. Dr. Harald Engel,
Dipl. Phys. Stefan Fruhner, Dipl. Ing. Maximilian Schmitt
Tanja Schlemm, Anke Zimmermann

4. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Di. 17.05.2011 8:15 Briefkasten ER-Geb./online über ISIS (max. 1MB)
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 8 (8 Punkte): *Harmonischer Oszillator in der QM*
In der Vorlesung haben wir die stationäre Schrödingergleichung für die eindimensionale Bewegung eines quantenmechanischen Teilchens im parabolischen Potential mit dem Ansatz
$\psi(y) = c_n H(y) e^{-\frac{y^2}{2}}$ auf die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - 2y\frac{d}{dy} + 2n\right) H_n(y) = 0 \qquad , \qquad n = 1, 2, \ldots$$

transformiert und diese Gleichung dann mit einem Potenzreihenansatz gelöst.

(a) Zeigen Sie nun direkt unter Verwendung der Methode der vollständigen Induktion, dass die hermiteschen Polynome $H_n(y) = (-1)^n e^{y^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2}$ (1) Lösungen der linearen homogenen ODE 2. Ordnung sind.

(b) Bestimmen Sie die Normierungskonstanten c_n, um sich zu überzeugen, dass die normierten Wellenfunktionen/ Eigenfunktionen des Hamiltonoperators für den harmonischen Oszillator

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n!}} H_n\left(\frac{x}{b}\right) e^{-\frac{x^2}{2b^2}}, \quad n = 1, 2, \ldots, \; b = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{\frac{1}{2}}$$

lauten. Zeigen Sie dazu, dass gilt:

$$\frac{1}{c_n^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dy \, [H_n(y)]^2 \, e^{-y^2} = \sqrt{\pi} 2^n n! \, .$$

Hinweis: Nutzen Sie dazu die zuvor aus (1) abzuleitende Relation $\frac{dH_n(y)}{dy} = 2nH_{n-1}(y)$.

(c) Zeigen Sie, dass die normierten Wellenfunktionen des harmonischen Oszillators mit unterschiedlichem Index n zueinander orthogonal sind.

Aufgabe 9 (12 Punkte): *Symmetrisches Pöschl-Teller-Potential*
Die gebundenen Zustände eines Teilchens in der eindimensionalen Potentialmulde der Form

$$V(x) = -\frac{U_0}{\cosh^2(\alpha x)} \qquad \text{mit} \qquad U_0 = \frac{s(s+1)}{2m} (\hbar\alpha)^2$$

können analytisch bestimmt werden. Erarbeiten Sie diese Lösungen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung $\hat{H}\psi = E\psi$ und stellen Sie die Energieeigenwerte $E < 0$ in Abhängigkeit von der Potentialtiefe U_0 dar.

Arbeitsprogramm:

(a) Zeigen Sie, dass die Schrödingergleichung durch die Substitution $y = \tanh(\alpha x)$ und die Notation $\epsilon = \sqrt{-2mE/(\hbar\alpha)^2}$ in die verallgemeinerte Legendresche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dy}\left[(1 - y^2)\frac{d\psi}{dy}\right] + \left[s(s+1) - \frac{\epsilon^2}{1 - y^2}\right]\psi = 0$$

übergeht.

(b) Führen Sie weiterhin die Funktion w durch $(1 - y^2)^{\epsilon/2} w(y) = \psi(y)$ ein und setzen Sie $u = (1 - y)/2$. Leiten Sie damit aus der Schrödingergleichung die Differentialgleichung

$$u(1 - u)w''(u) + [c - (a + b + 1)u] \, w'(u) - abw(u) = 0$$

für die Funktion $w(u)$ ab, wobei $a = \epsilon - s$, $b = \epsilon + s + 1$ und $c = \epsilon + 1$ gelten muss.

(c) Die Lösung dieser Differentialgleichung, die zu einer für $x \to -\infty$ gegen Null konvergierenden Wellenfunktion führt, heißt *hypergeometrische Funktion* ${}_2F_1(a, b, c, u)$. Damit diese Lösung auch zu einer für $x \to +\infty$ gegen Null konvergierenden Wellenfunktion führt, muss $a = \epsilon - s$ eine nichtpositive ganze Zahl sein. Bestimmen Sie mit dieser Kenntnis die möglichen negativen Energieeigenwerte.

(d) Stellen Sie die Energieeigenwerte für ein Elektron der Masse $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31} kg$ und $\alpha = 10^9 m^{-1}$ in einem Bereich $0 < U_0 < 1eV$ dar (*Mathematica*).

(e) Berechnen Sie für $U_0 = 6(\alpha\hbar)^2/m_e$ **alle** normierten Wellenfunktionen zu den existierenden negativen Energieeigenwerten (*Mathematica*).

Hinweis:

- Die Lösung der in (b) angebenen Differentialgleichung läßt sich in *Mathematica* mit dem Befehl DSolve bestimmen:

$$\begin{aligned}\text{In[1]} =\ & \text{DSolve}[u(1-u)w''[u] + (c-(a+b+1)u)w'[u] - abw[u] == 0, w[u], u]\\ \text{Out[1]} =\ & \{\{w[u] \to C[1]\text{Hypergeometric2F1}[a,b,c,u]\\ & +(-1)^{1-c}u^{1-c}C[2]\text{Hypergeometric2F1}[1+a-c, 1+b-c, 2-c, u]\}\}\,.\end{aligned}$$

- Die hypergeometrische Funktion ${}_2F_1$ kann folgendermaßen als Reihe dargestellt werden:

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} z^k.$$

Dabei bedeuten:

$$\begin{aligned}(a)_k &= a(a+1)(a+2)\dots(a+k-1),\\ (b)_k &= b(b+1)(b+2)\dots(b+k-1),\\ (c)_k &= c(c+1)(c+2)\dots(c+k-1) \qquad \text{mit} \qquad k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

- Diese Potenzreihe besitzt den Konvergenzradius $R = 1$.

Aktuelle Informationen werden auf der Webseite bekannt gegeben. Diese ist zu erreichen über

`http://www.tu-berlin.de/?98665`

Wochenplan

	Di	**Mi**	**Do**
8-10	VL EW 203	VL EW 202	
10-12	Tut H 2033 TS		Tut EW 226 TS
12-14	Tut EB 133C M/S	Tut EW 226 AZ	
14-16	Tut ER 164 M/S		Tut EB 417 AZ

M/S – Max Schmitt/Stefan Fruhner, TS – Tanja Schlemm, AZ – Anke Zimmermann

Sprechzeiten:

Name	**Tag**	**Zeit**	**Raum**	**Tel.**
Prof. Dr. H. Engel	Mi.	14:30-16:00	EW 738	79462
Stefan Fruhner	Fr.	13:30-14:30	EW 627/28	27681
Max Schmitt	Do.	10:00-11:00	EW 708	25225
Tanja Schlemm	Fr.	11:00-12:00	EW 060	26143
Anke Zimmermann	Di.	12:00-13:00	EW 060	26143