Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 12. Mai 2011

Prof. Dr. Harald Engel,
Dipl. Phys. Stefan Fruhner, Dipl. Ing. Maximilian Schmitt
Tanja Schlemm, Anke Zimmermann

5. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Di. 24.05.2011 8:15 Briefkasten ER-Geb./online über ISIS (max. 1MB)
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 10 (7 Punkte): *Hermitesche Operatoren*

Ein Operator $\hat{A}^\dagger$ ist adjungiert zu $\hat{A}$ wenn

$$\langle\phi|\hat{A}\psi\rangle = \langle\hat{A}^\dagger\phi|\psi\rangle$$

für alle ψ, ϕ gilt. Ein Operator heißt hermitesch, wenn ferner $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ gilt.

(a) Überprüfen Sie ob die folgenden Operatoren hermitesch sind:

$$\hat{A}_1 = \hat{x}\hat{p}\ , \qquad \hat{A}_2 = \hat{p}\hat{x}\ , \qquad \hat{A}_3 = 1/2(\hat{p}\hat{x} + \hat{x}\hat{p})\ ,$$

wobei der Impulsoperator $\hat{p}$ definiert ist als $\hat{p} = -i\hbar\nabla$.

(b) Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ zwei hermitesche Operatoren. Zeigen Sie, dass folgendes gilt

$$\langle[\hat{B},\hat{A}]\rangle \quad = \quad \langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle^*.$$

(c) Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ zwei hermitesche Operatoren und sei $\hat{Q} = \Delta\hat{A} - i\lambda\Delta\hat{B}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Delta\hat{A} = \hat{A} - \langle\hat{A}\rangle$ und $\Delta\hat{B} = \hat{B} - \langle\hat{B}\rangle$. Beweisen Sie, dass $\hat{Q}^\dagger\hat{Q}$ ein hermitescher Operator ist.

Aufgabe 11 (13 Punkte): *Lineare Operatoren*

(a) Berechnen Sie die Kommutatoren $[F(\hat{x}),\hat{p}]$ und $[F(\hat{p}),\hat{x}]$.

Hinweis: $F(\hat{p})$ kann als Taylorreihe $F = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\hat{p}^n$ dargestellt werden.

(b) Beweisen Sie die Jacobi Identität für lineare nicht kommutierende Operatoren: $\hat{A}$,$\hat{B}$, and $\hat{C}$:

$$\Big[\hat{A},[\hat{B},\hat{C}]\Big] + \Big[\hat{B},[\hat{C},\hat{A}]\Big] + \Big[\hat{C},[\hat{A},\hat{B}]\Big] = 0$$

(c) Zeigen Sie folgende Behauptungen unter Verwendenung der Darstellung $e^{\hat{A}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\hat{A}^n}{n!}$ für die Exponentialfunktion eines Operators sowie unter der Bedingung, dass $\Big[[\hat{A},\hat{B}],\hat{A}\Big] = \Big[[\hat{A},\hat{B}],\hat{B}\Big] = 0$ gilt:

1. $e^{\hat{A}}\hat{B} = (\hat{B} + [\hat{A},\hat{B}])e^{\hat{A}}$
2. $e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-[\hat{A},\hat{B}]/2}$
3. $e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{B}}e^{\hat{A}}e^{[\hat{A},\hat{B}]}$

Hinweis: Betrachten Sie in Punkt 2 die Funktionen $f(t) = e^{t(\hat{A}+\hat{B})}$ und $g(t) = e^{t\hat{A}}e^{t\hat{B}}e^{-t^2[\hat{A},\hat{B}]/2}$. Zeigen Sie, dass diese Funktionen der gleichen linearen DGL zu gleichen Anfangswerten gehorchen (unter Ausnutzung von Punkt 1). Analog für Punkt 3 mit den Funktionen $f(t) = e^{t\hat{A}}e^{\hat{B}}$ und $g(t) = e^{\hat{B}}e^{t\hat{A}}e^{[t\hat{A},\hat{B}]}$.

Aktuelle Informationen werden auf der Webseite bekannt gegeben. Diese ist zu erreichen über

`http://www.tu-berlin.de/?98665`

Wochenplan

	Di	**Mi**	**Do**
8-10	VL EW 203	VL EW 202	
10-12	Tut H 2033 TS		Tut EW 226 TS
12-14	Tut EB 133C M/S	Tut EW 226 AZ	
14-16	Tut ER 164 M/S		Tut EB 417 AZ

M/S – Max Schmitt/Stefan Fruhner, TS – Tanja Schlemm, AZ – Anke Zimmermann

Sprechzeiten:

Name	**Tag**	**Zeit**	**Raum**	**Tel.**
Prof. Dr. H. Engel	Mi.	14:30-16:00	EW 738	79462
Stefan Fruhner	Fr.	13:30-14:30	EW 627/28	27681
Max Schmitt	Do.	10:00-11:00	EW 708	25225
Tanja Schlemm	Fr.	11:00-12:00	EW 060	26143
Anke Zimmermann	Di.	12:00-13:00	EW 060	26143