Prof. Dr. Harald Engel,
Dipl. Phys. Stefan Fruhner, Dipl. Ing. Maximilian Schmitt
Tanja Schlemm, Anke Zimmermann

6. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Di. 31.05.2011 8:15 Briefkasten ER-Geb./online über ISIS (max. 1MB)
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 12 (7 Punkte): *Matrixdarstellung von Operatoren und Basiswechsel*

Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ zwei Operatoren mit vollständigen, orthonormierten Eigensystemen $\{|a_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $\{|b_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ und nichtentarteten Eigenwerten α_n und β_n.

(a) Es sei die $\hat{A}$-Darstellung von $|\psi\rangle$ gegeben durch $\psi_A(\alpha_n) := \langle a_n|\psi\rangle$. Welche Form hat $|\psi\rangle$ in der $\hat{B}$-Darstellung?

(b) Welche Form hat der Operator $\hat{A}$ in der $\hat{A}$- und in der $\hat{B}$-Darstellung, d.h. wie sieht der Vektor $\hat{A}|\psi\rangle$ in der jeweiligen Darstellung aus, wenn $|\psi\rangle$ in eben dieser Darstellung gegeben ist?

(c) Seien $\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\psi_A = (\psi_A(-1), \psi_A(1)) = (5, 3)$ in der $\hat{B}$-Darstellung und $\hat{A}$ in den beiden Darstellung. *Hinweis:* Definieren Sie sich dazu entsprechende Spaltenvektoren- bzw. Matrix-Darstellungen, indem Sie angeben, welche Komponente sich auf welchen Eigenwert bezieht.

Aufgabe 13 (6 Punkte): *Pauli-Matrizen*

Mit der Definition der Pauli-Matrizen in der $\hat{S}_z$-Darstellung $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$, in der $\hat{S}_z$ diagonal ist.

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

lassen sich die Spin-Operatoren $\hat{S}_x, \hat{S}_y$ und $\hat{S}_z$ kompakt als $\hat{\boldsymbol{S}} = \frac{\hbar}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ schreiben. Ein Ensemble von Teilchen ist im Zustand $|a\rangle$ präpariert als eine Überlagerung zweier Spinzustände
$|a\rangle = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Erwartungswerte der Spinoperatoren $\langle\hat{S}_x\rangle$, $\langle\hat{S}_y\rangle$ und $\langle\hat{S}_z\rangle$ im Zustand $|a\rangle$.

(b) Bestimmen Sie die Eigenvektoren und Eigenwerte von $\hat{\sigma}_x$ und $\hat{\sigma}_z$.

(c) Seien $b_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}$ und $b_2 = 3$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der beiden möglichen Messwerte einer Messung von $\hat{S}_x$ bzw. $\hat{S}_z$.

Aufgabe 14 (7 Punkte): *Unitäre Transformationen*
Gegeben seien die folgenden Matrixdarstellungen der Operatoren $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$:

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{L}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{L}_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

(a) Zeigen Sie, dass alle drei Operatoren dieselben Eigenwerte besitzen.

(b) Suchen Sie die unitäre Matrix U, die $\hat{L}_y$ diagonalisiert.

(c) Berechnen Sie damit auch $\overline{\hat{L}_x} = U\hat{L}_x U^\dagger$.

Aktuelle Informationen werden auf der Webseite bekannt gegeben. Diese ist zu erreichen über

`http://www.tu-berlin.de/?98665`

Wochenplan

	Di	**Mi**	**Do**
8-10	VL EW 203	VL EW 202	
10-12	Tut H 2033 TS		Tut EW 226 TS
12-14	Tut EB 133C M/S	Tut EW 226 AZ	
14-16	Tut ER 164 M/S		Tut EB 417 AZ

M/S – Max Schmitt/Stefan Fruhner, TS – Tanja Schlemm, AZ – Anke Zimmermann

Sprechzeiten:

Name	**Tag**	**Zeit**	**Raum**	**Tel.**
Prof. Dr. H. Engel	Mi.	14:30-16:00	EW 738	79462
Stefan Fruhner	Fr.	13:30-14:30	EW 627/28	27681
Max Schmitt	Do.	10:00-11:00	EW 708	25225
Tanja Schlemm	Fr.	11:00-12:00	EW 060	26143
Anke Zimmermann	Di.	12:00-13:00	EW 060	26143