Prof. Dr. Harald Engel,
Dipl. Phys. Stefan Fruhner, Dipl. Ing. Maximilian Schmitt
Tanja Schlemm, Anke Zimmermann

7. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Di. 07.06.2011 8:15 Briefkasten ER-Geb./online über ISIS (max. 1MB)
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 15 (8 Punkte): *Diskretes und kontinuierliches Spektrum*
Diskretes Spektrum

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$\psi_m(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{i(2\pi m/a)x} \ ,$$

auf dem Intervall $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ für $a, x \in \mathbb{R}$ und $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ein orthonormiertes System bilden.

(b) Eine periodische Funktion $f(x) = f(x+a)$ lässt sich nach dieser Basis entwickeln, wobei $f(x) = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} c_m \psi_m$. Wie berechnen sich die Entwicklungskoeffizienten c_m?

Kontinuierliches Spektrum

(c) Schreiben Sie nun die Entwicklung in der Form $f(x) = \frac{1}{a} \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{m}{a}\right) e^{i(2\pi m/a)x}$, setzen Sie $y_m = \frac{m}{a}$ und führen Sie den Übergang $a \to \infty$ durch. Wie lautet nun die Formel für $f(x)$ und welcher mathematischen Operation entspricht sie? Wie sind nun die Funktionen ψ definiert?

(d) Wie lautet die Orthogonalitätsrelation im kontinuierlichen Fall?
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx}$.

Aufgabe 16 (9 Punkte): *Ehrenfestsches Theorem*

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Schrödingergleichung $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$ die Bewegungsgleichung für den Erwartungswert eines (nicht explizit zeitabhängigen) Operators $\hat{A}$:

$$-i\hbar \frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle = \langle [\hat{H}, \hat{A}] \rangle \ .$$

(b) Zeigen Sie, dass folgende Gleichungen für die Erwartungswerte des Ortsoperators $\hat{x}$, Impulsoperators $\hat{p}$, Drehimpulsoperators $\hat{L}$ sowie der Operatoren $\hat{F} := -\nabla V$ (Kraft) und $\hat{T} := \hat{x} \times \hat{F}$ (Drehmoment) gelten:

1. $\frac{d}{dt} \langle \hat{x} \rangle = \frac{1}{m} \langle \hat{p} \rangle$,
2. $\frac{d}{dt} \langle \hat{p} \rangle = \langle \hat{F} \rangle$,
3. $\frac{d}{dt} \langle \hat{L} \rangle = \langle \hat{T} \rangle$.

(c) In welchen Fällen erhält man für $\langle \hat{x} \rangle$ eine klassische Bewegungsgleichung? Welche physikalischen Systeme schließt das ein? Unter welcher Annahme erhält man für $\langle \hat{x} \rangle$ nur näherungsweise eine klassische Bewegungsgleichung?
Hinweis: Entwickeln Sie $\hat{F}$ in eine Taylorreihe um $\langle \hat{x} \rangle$.

Aufgabe 17 (3 Punkte): *Unschärferelation des harmonischen Oszillators*

In der Quantenmechanik kann ein Teilchen nicht gleichzeitig einen exakten Ort und einen exakten Impuls besitzen, da die Standardabweichungen der beiden Observablen über die Unschärferelation verknüpft sind:

$$\Delta\hat{p}\Delta\hat{x} \geq \frac{1}{2}\hbar \, .$$

Finden Sie damit die Grundzustandsenergie eines harmonischen Oszillator mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2} \, .$$

Aktuelle Informationen werden auf der Webseite bekannt gegeben. Diese ist zu erreichen über

`http://www.tu-berlin.de/?98665`

Wochenplan

	Di	Mi	Do
8-10	VL EW 203	VL EW 202	
10-12	Tut H 2033 TS		Tut EW 226 TS
12-14	Tut EB 133C M/S	Tut EW 226 AZ	
14-16	Tut ER 164 M/S		Tut EB 417 AZ

M/S – Max Schmitt/Stefan Fruhner, TS – Tanja Schlemm, AZ – Anke Zimmermann

Sprechzeiten:

Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.
Prof. Dr. H. Engel	Mi.	14:30-16:00	EW 738	79462
Stefan Fruhner	Fr.	14:00-15:00	EW 627/28	27681
Max Schmitt	Do.	10:00-11:00	EW 708	25225
Tanja Schlemm	Fr.	11:00-12:00	EW 060	26143
Anke Zimmermann	Di.	12:00-13:00	EW 060	26143