Prof. Dr. Harald Engel,
Dipl. Phys. Stefan Fruhner, Dipl. Phys. Judith Lehnert, Dipl. Ing. Maximilian Schmitt
Tanja Schlemm, Anke Zimmermann

8. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Di. 14.06.2011 8:15 Briefkasten ER-Geb./online über ISIS (max. 1MB)
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 18 (7 Punkte): *Harmonischer Oszillator in Matrixdarstellung*

Wir betrachten die Eigenzustände $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^+)^n |0\rangle$ des Erzeugungsoperators $\hat{a}^+$ des Harmonischen Oszillators in Matrixdarstellung. Die Eigenzustände lauten dann:

$$|0\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad |1\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad |2\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad \cdots \quad .$$

Berechnen Sie die Matrixdarstellung des Erzeugungs- und Vernichtungsoperators $\hat{a}^+$ und $\hat{a}$, des Orts- und Impulsoperator $\hat{x}$ und $\hat{p}$ und des Hamiltonoperators $\hat{H}$ in dieser Basis. Leiten Sie für den letzten Fall zunächst einen Ausdruck für den Hamiltonoperator her, der nur von $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ abhängt.

Aufgabe 19 (13 Punkte): *Drehimpulsoperatoren*
Ein System befinde sich im gemeinsamen Eigenzustand $|lm\rangle$ der Drehimpulsoperatoren $\hat{L}_z$ und $\hat{\mathbf{L}}^2$. Es gelten die Eigenwertgleichungen:

$$\hat{\mathbf{L}}^2|lm\rangle = \hbar^2 l(l+1)|lm\rangle\,, \quad \hat{L}_z|lm\rangle = \hbar m|lm\rangle.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\hat{\mathbf{L}}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$ und $\hat{L}_z$ ein gemeinsames System von Eigenzuständen besitzen also für den Kommutator gelten muss: $\left[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_j\right] = 0$ mit $j \in \{x, y, z\}$.

(b) Zeigen Sie: Falls ein Operator mit zwei Komponenten des Drehimpulsoperators kommutiert, so kommutiert er auch mit der dritten Komponente.

(c) Zeigen Sie: $\langle lm|\hat{L}_i|lm\rangle = 0$ für $i \in \{x, y\}$.

(d) Berechnen Sie $\langle lm| \left(\hat{L}_i - \langle\hat{L}_i\rangle\right)^2 |lm\rangle$ für $i \in \{x, y, z\}$.

(e) Zeigen Sie, dass die kleinste Streuung $\Delta\hat{L}_x$ bzw. $\Delta\hat{L}_y$ erreicht wird, wenn $|m| = l$ ist.

(f) Zeigen Sie: $L_\pm|lm\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}\,|lm \pm 1\rangle$.

(g) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass es zu gegebenem l genau $m = 2l+1$ Einstellungen gibt. Mit $l = 1$ ergeben sich also 3 mögliche Werte für m. Geben Sie die Matrixdarstellung von $\hat{L}_+$ und $\hat{L}_-$ an und berechnen Sie nun mit Hilfe dieses Ergebnisses auch die Matrixdarstellung von $\hat{L}_x, \hat{L}_y$ und $\hat{L}_z$.

Aktuelle Informationen werden auf der Webseite bekannt gegeben. Diese ist zu erreichen über

`http://www.tu-berlin.de/?98665`

Wochenplan

	Di	**Mi**	**Do**
8-10	VL EW 203	VL EW 202	
10-12	Tut H 2033 TS		Tut EW 226 TS
12-14	Tut EB 133C M/S	Tut EW 226 AZ	
14-16	Tut ER 164 M/S		Tut EB 417 AZ

M/S – Max Schmitt/Stefan Fruhner, TS – Tanja Schlemm, AZ – Anke Zimmermann

Sprechzeiten:

Name	**Tag**	**Zeit**	**Raum**	**Tel.**
Prof. Dr. H. Engel	Mi.	14:30-16:00	EW 738	79462
Stefan Fruhner	Fr.	14:00-15:00	EW 627/28	27681
Max Schmitt	Do.	10:00-11:00	EW 708	25225
Tanja Schlemm	Fr.	11:00-12:00	EW 060	26143
Anke Zimmermann	Di.	12:00-13:00	EW 060	26143