

10. Übungsblatt zur Theoretischen Physik IV

Fraktale, Ising-Modell

Abgabe: Montag 04. 07. 2011 bis 12.00 Uhr in den Briefkasten im Physik-Altbau.

Aufgabe 28 (8 Punkte): *Thermodynamik von Fraktalen*

Wir betrachten folgendes Energiespektrum als Approximation eines fraktalen Energiespektrums (Cantor-Menge):

$$\{E\}_n = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \frac{c_3}{3^3} + \dots + \frac{c_n}{3^n},$$

wobei c_k die Werte 0 oder 2 annehmen sollen. Ein Mikrozustand ist dann durch Angabe von c_1, c_2, \dots, c_n definiert.

1. Berechnen Sie für dieses System einen Ausdruck für die kanonische Zustandssumme und die spezifische Wärme C_V bei der Temperatur T .
2. Berechnen Sie damit $C_V(T)$ numerisch für $n = 1, n = 5, n = 10$ und zeigen Sie so, dass $C_V(T \rightarrow 0)$ für große n um die Hausdorff-Dimension der Cantor-Menge oszilliert.

Aufgabe 29 (12 Punkte): *Ising-Modell*

Betrachten Sie das eindimensionale ISING-Modell mit der Hamiltonfunktion

$$H = -2\mu B \sum_{j=1}^N S_j - 2J \sum_{j=1}^N S_j S_{j+1},$$

wobei für die Spinvariablen gilt: $S_j \in \{-1/2, +1/2\}$ für $j = 1 \dots N$ und $S_{N+1} = S_1$.

1. Zeigen Sie, dass sich die kanonische Zustandssumme schreiben lässt als $Z = \text{Spur}(A^N)$, wobei die Matrix A gegeben ist durch

$$A = \begin{pmatrix} e^{\beta(\mu B + \frac{1}{2}J)} & e^{-\beta \frac{1}{2}J} \\ e^{-\beta \frac{1}{2}J} & e^{\beta(-\mu B + \frac{1}{2}J)} \end{pmatrix}$$

2. Zeigen Sie, dass im thermodynamischen Limes $N \rightarrow \infty$ die Freie Energie pro Spin durch

$$F(T, B) = -k_B T \ln(\lambda_1)$$

gegeben ist, wobei λ_1 den größeren Eigenwert von A bezeichnet.

3. Bestimmen Sie die Magnetisierung $\langle M \rangle$ sowie $\langle M^2 \rangle$ für $|\beta\mu B| \ll 1$.
4. Warum gibt es ohne Magnetfeld keine spontane Magnetisierung für $T > 0$?

- **Internetseite der Veranstaltung:** <http://www.tu-berlin.de/?98664>
- **Vorlesung:** Mittwoch 12:00 bis 14:00 Uhr und Freitag 8:00 bis 10:00 Uhr in EW 203
- **Literatur:**
 - Arnold Sommerfeld, *Vorlesungen über Theoretische Physik - Thermodynamik und Statistik*
 - R. Becker, *Theorie der Wärme*
 - Wolfgang Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 4 - spezielle Relativitätstheorie und Thermodynamik*
 - Wolfgang Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 6 - statistische Physik*
 - Norbert Straumann, *Thermodynamik*
 - Herbert B. Callen, *Thermodynamics (1966), Thermodynamics and an introduction to thermostatics (1985)*
- **Tutorien:**
 - Dienstag, 12:00 bis 14:00 Uhr bei Mathias Hayn
 - Mittwoch, 8:00 bis 10:00 Uhr bei Arash Azhand
 - Donnerstag, 12:00 bis 14:00 Uhr bei Philipp Zedler
- **Scheinkriterien:** 50% der Punkte aus den Übungszetteln, aktive Teilnahme an den Tutorien und bestandene Klausur.
- **Sprechstunden:**
 - Prof. Dr. T. Brandes: Mo, 13:00 - 14:00 Uhr in EW 744
 - Philipp Zedler: Mi, 11:00 - 12:00 Uhr EW 711
 - Arash Azhand: Fr, 14:00 - 15:00 Uhr in EW 627
- **Klausur:**
 - *Datum:* Mi, 13. 07. 2011
 - *Zeit:* 12:00 - 14:00 Uhr
 - *Raum:* EW 201