Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Clive Emary
Arash Azhand, Mathias Hayn, Philipp Zedler

25. Mai 2011

www.tu-berlin.de/?98664

6. Übungsblatt zur Theoretischen Physik IV

Rényi-Entropie, Paramagnetischer Festkörper, Rotator

Abgabe: Montag 06. 06. 2011 bis 12.00 Uhr in den Briefkasten im Physik-Altbau.

Aufgabe 16 (6 Punkte): *Rényi-Entropie*
Die Rényi-Information ist ein Folgendermaßen definiertes Informationsmaß:

$$I_q(\{p_n\}) = \frac{1}{1-q} \ln \left(\sum_{n=1}^{N} p_n^q \right) \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{q \to 1_+} I_q(\{p_n\}) = I(\{p_n\}) = -\sum_{n=1}^{N} p_n \ln p_n \tag{2}$$

die Shannon-Entropie liefert.
Für kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\rho(x)$ ist die Rényi-Information durch

$$I_q(\rho) = \frac{1}{1-q} \ln \left(\int dx \rho^q(x) \right) \tag{3}$$

gegeben. Berechnen Sie diesen Ausdruck im Fall einer Gauß-Verteilung

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[(x-\mu)^2/2\sigma^2 \right], \tag{4}$$

und vergleichen Sie es mit der Shannon-Information.

Aufgabe 17 (8 Punkte): *Paramagnetischer Festkörper*

(a) Benutzen Sie das Gesetz von Boltzmann, $S = k_B \ln \Omega$ und die Stirling'sche Approximation, $\ln m! \approx m \ln m - m$, für $m \gg 1$, um zu zeigen, dass die Entropie eines paramagnetischen Festkörpers, das aus einer Schicht von N unabhängigen Spin-$\frac{1}{2}$ Atomen besteht, gegeben ist durch

$$S = k_B \left[N \ln N - n \ln n - (N-n) \ln(N-n) \right], \tag{5}$$

wenn die Anzahl der up-spins in die z-Richtung gleich n ist und damit logischerweise die Anzahl der down-spins in die z-Richtung $N - n$ beträgt.

(b) Man platziere nun das paramagnetische Festkörper in ein magnetisches Feld B in z-Richtung und die Spins sollen einen magnetischen Dipolmoment μ besitzen. Zeigen Sie, dass die interne Energie gegeben ist durch $E = (N - 2n)\mu B$.

(c) Benutzen Sie die Definition der Temperatur im Rahmen der statistischen Mechanik und die Relation

$$(\partial S/\partial E)_{B,N} = (\partial n/\partial E)_{B,N} (\partial S/\partial n)_N, \tag{6}$$

um zu zeigen, dass die innere Energie in Abhängigkeit von der Temperatur gegeben ist durch

$$E = -N\mu B \tanh(\mu B/k_B T). \tag{7}$$

Hinweis: Zunächst finde man T als Funktion von n, $T = T(n)$, und dann invertiere die Relation, um $n = n(T)$ zu erhalten.

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 18 (6 Punkte): *Rotator*
Ein zweiatomiges Molekül eines bestimmten Gases (jedes Molekül mit einem Trägheitsmoment I) habe Rotationsenergieniveaus, gegeben durch

$$E_l = (\hbar^2/2I)l(l+1); \quad l = 0, 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

mit der Entartung $g_l = (2l+1)$.
Zeigen Sie, dass die Ein-Teilchen-Verteilungsfunktion, Z_1, gegeben ist durch

$$Z_1(T) = 1 + 3\exp(-\hbar^2/Ik_BT) \tag{9}$$

im Limes kleiner Temperatur ($T \ll \hbar^2/k_BI$), und duch

$$Z_1(T) = 2Ik_BT/\hbar^2 \tag{10}$$

im Limes großer Temperatur ($T \gg \hbar^2/k_BI$).
Hinweis: Man ersetze Summen durch Integrale, wo es gerechtfertigt ist.

- **Internetseite der Veranstaltung:** http://www.tu-berlin.de/?98664
- **Vorlesung:** Mittwoch 12:00 bis 14:00 Uhr und Freitag 8:00 bis 10:00 Uhr in EW 203
- **Literatur:**
  - Arnold Sommerfeld, *Vorlesungen über Theoretische Physik - Thermodynamik und Statistik*
  - R. Becker, *Theorie der Wärme*
  - Wolfgang Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 4 - spezielle Relativitätstheorie und Thermodynamik*
  - Wolfgang Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 6 - statistische Physik*
  - Norbert Straumann, *Thermodynamik*
  - Herbert B. Callen, *Thermodynamics (1966), Thermodynamics and an introduction to thermostatics (1985)*
- **Tutorien:**
  - Dienstag, 12:00 bis 14:00 Uhr bei Mathias Hayn
  - Mittwoch, 8:00 bis 10:00 Uhr bei Arash Azhand
  - Donnerstag, 12:00 bis 14:00 Uhr bei Philipp Zedler
- **Scheinkriterien:** 50% der Punkte aus den Übungszetteln, aktive Teilnahme an den Tutorien und bestandene Klausur.
- **Sprechstunden:**
  - Prof. Dr. T. Brandes: Mo, 13:00 - 14:00 Uhr in EW 744
  - Philipp Zedler: Mi, 11:00 - 12:00 Uhr EW 711
  - Arash Azhand: Do, 11:00 - 12:00 Uhr in EW 627