

Bonusblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

Abgabe: Mittwoch, den 11. Juli 2012 vor der Vorlesung

Ausgabe: Dienstag, den 26. Juni 2012

Kanonischer Formalismus der Allgemeinen Relativitätstheorie (15 Punkte)

(i) Zeigen Sie, dass die zweite Fundamentalform einer raumartigen Hyperfläche $K_{\alpha\beta} := h_{\alpha}^{\kappa} h_{\beta}^{\lambda} \nabla_{(\lambda} n_{\kappa)}$ (worin n_{α} mit $n_{\alpha} n^{\alpha} = 1$ der Einheits-Normalenvektor auf der raumartigen Hyperfläche und $h_{\alpha}^{\kappa} = \delta_{\alpha}^{\kappa} - n_{\alpha} n^{\kappa}$ der Projektor auf die raumartige Hyperfläche sind), ebenfalls in der Form $K_{\alpha\beta} = D_{(\alpha} n_{\beta)}$ geschrieben werden kann. Darin bezeichnet $D_{\alpha} := h_{\alpha}^{\kappa} \nabla_{\kappa}$ die kovariante Ableitung auf der Hyperfläche.

(ii) Zeigen Sie, dass die zweite Fundamentalform $K_{\alpha\beta}$ in dem Koordinatensystem in welchem $n_{\alpha} = N \delta_{\alpha}^0$, $n^{\alpha} = N^{-1}(1, -N^j)$ und $N^{\alpha} = (0, N^j)$ gilt, die Komponenten $K_{00} = 0$, $K_{0j} = 0$ und $K_{ij} = \frac{1}{2N}(-2N_{(i,j)} + N^l(2g_{l(i,j)} - g_{ij,l}) + g_{ij,0})$ besitzt. Benutzen Sie dabei die in der Übung abgeleiteten Darstellungen der Metrik und die Definition der Christoffelsymbole.

(iii) Leiten Sie aus der Lagrange-Dichte $\mathcal{L} = N\sqrt{\gamma}(R^{(3)} + K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta} - K^2)$ und der zweiten Fundamentalform $K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2N}(\dot{h}_{\alpha\beta} - 2D_{(\alpha}N_{\beta)})$ die kanonischen Impulse $\pi_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{\alpha\beta}} = \sqrt{\gamma}(K_{\alpha\beta} - Kh_{\alpha\beta})$ ab.

Beachten Sie, dass N , γ und $R^{(3)}$ nicht Funktion von $K_{\alpha\beta}$ sind. Weiterhin ist es enorm hilfreich anstatt $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{\alpha\beta}}$ den Ausdruck $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{\delta\gamma}} \frac{\partial K_{\delta\gamma}}{\partial \dot{h}_{\alpha\beta}}$ zu berechnen.

(iv) Bestimmen Sie damit die Hamilton-Dichte $\mathcal{H} = \pi_{\alpha\beta} \dot{h}^{\alpha\beta} - \mathcal{L}$.

Eine Kommentierung Ihres Vorgehens wird erwartet! Dafür gibt es auch Punkte!

Sprechstunde: Nach Vereinbarung oder direkt nach der Übung.

Falls es Fragen gibt, bin ich auch per Mail erreichbar:

gerold.schellstede@campus.tu-berlin.de