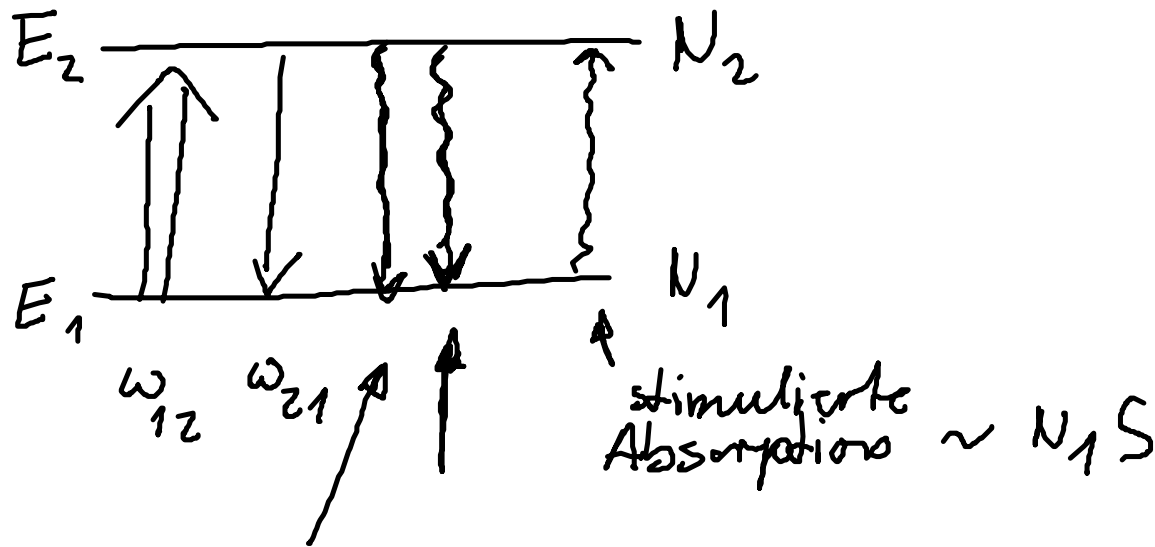


# Nichtlineare Laserdynamik

## 2. Bilanzgleichungen

- Laser Rategleichungen

---



2 Niveau System

$N_2$  Besetzungszahl von  $E_2$

spontane  
Emission  
 $\sim N_2$

stimulierte  
Emission  
 $\sim N_2 S$

$W$ : Einstein  
Koeffizient

$V$ : optisches  
Volumen

- Lichtintensität beschrieben durch Photonendichte  $S$

"Änderung von  $S$ :

$\tau_p = (2k)^{-1}$  Photonen-  
lebensdauer  
↓

$$(I) \quad \frac{dS}{dt} = W(N_2 - N_1)S + \frac{W}{V}N_2 - 2kS$$

stimulierte Absorption  
Emission

spontane  
Emission

Verluste im  
Resonator

$$(II) \quad \frac{dN_2}{dt} = \underbrace{\omega_{12}N_1}_{\text{Pumptrate}} - \underbrace{\omega_{21}N_2}_{\text{nichtstrahlende Verlustrate}} - \underbrace{(N_2 - N_1)WZ}_{\text{induzierte Prozesse}} - \underbrace{WN_2}_{\text{spont. Emission}}$$

Photonenzahl  $Z = S \cdot V$   
↓

$$\textcircled{\text{II}}) \quad \frac{dN_1}{dt} = - \frac{dN_2}{dt}$$

Gesamtzahl der Atome  
in Kavität  $N$

$$N_1 + N_2 = N$$

• 3 dynamische Variablen  $N_1, N_2, S$   
mit Nebenbedingung

→ Reduzieren auf 2 Variablen ist sinnvoll

$S$

$$0 = N_2 - N_1$$

## 2.1. Ein-Moden-Laser

$$\frac{dS}{dt} = WDS - 2KS + \frac{1}{2} \frac{W}{V} (N+D)$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{D_0 - D}{T} - 2WDS \cdot \underbrace{V}_Z - W(N+D)$$

Nichtlineares  
Gleichungssystem  
für Laserdynamik

(folgt direkt aus  
I und II)

$$T_2 = \frac{1}{\omega_{21} + \omega_{12}}$$

$\hat{=}$  Zeitkonstante der  
Relaxation von  $D_0$  auf  $D$   
Lebensdauer der Elektronen

$$D_0 := N \frac{\omega_{12} - \omega_{21}}{\omega_{21} + \omega_{12}} \quad \hat{=} \text{Pumprate}$$

### 2.1.1. Stationäre Lösungen (ohne spontane Emission)

$$\frac{dD}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad D_0 - D = 2TWDSV \quad (1)$$

$$\frac{dS}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = (WD - 2R)S$$

Es existieren 2 Lösungen

$$(i) \quad S = 0 \quad \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \quad \boxed{D = D_0}$$

$$(ii) \quad S \neq 0, \quad D = \frac{2R}{W} \quad \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\boxed{S} = \frac{\boxed{D_0}W - 2R}{4RTW \cdot V}$$

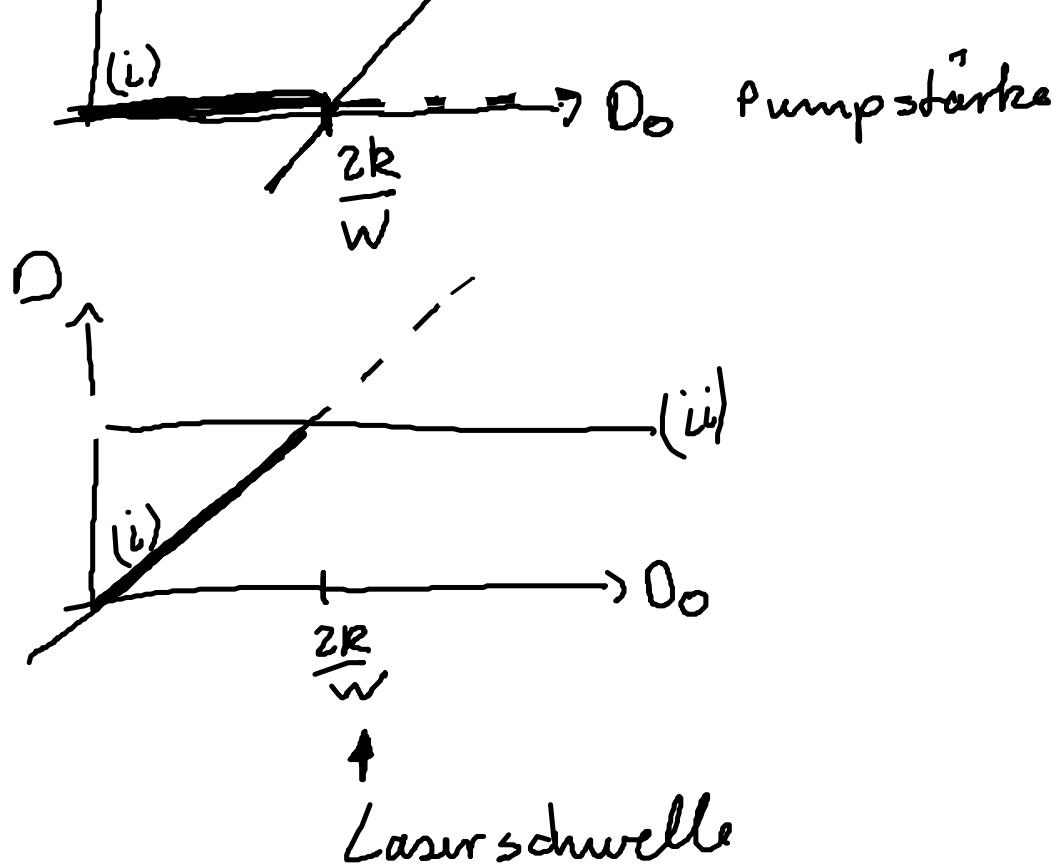
keine  
Lasertätigkeit

Laser  
ist an

S ↑

↗ (ii)

• 2 Lösungen für alle



Pumpstärke

- Frage: Stabilität?

- Stabilität gegenüber kleinen Störungen der stationären Lösungen (Fixpunkte)

(i)  $S^* = 0$  Lösung ohne Laserfähigkeit

$$D^* = D_0$$

$$S(t) = S^* + \delta S(t) \quad \leftarrow \text{klein!}$$

$$D(t) = D^* + \delta D(t)$$

Neue Variablen für die  
lineare Gleichung gesucht wird

eingesetzt in V Bilanzgleichung

$$\frac{d}{dt} \delta D = \frac{0 - D^* - \delta D}{T} - 2W (D^* + \delta D) (S^* + \delta S) \cdot V$$

$$\approx -\frac{\delta D}{T} - 2W D^* \delta S \cdot V$$

- quadratische Terme  
 $\delta D \cdot \delta S$  werden  
vernachlässigt

$$\frac{d}{dt} \delta S \approx W D^* \delta S - z k \delta S$$

kompakt, 
$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta D \\ \delta S \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{T} & -z W D_0^V \\ 0 & W D_0 - z k \end{pmatrix}}_{\text{Jacobi Matrix A des}} \begin{pmatrix} \delta D \\ \delta S \end{pmatrix} \quad (2)$$

dyn. Systems am Fixpunkt

Lösungsansatz 
$$\begin{pmatrix} \delta D \\ \delta S \end{pmatrix} \sim e^{\lambda t}$$



$$\langle \underline{z} \rangle \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{T} - \lambda & -z\omega D_0 \cdot v \\ 0 & \omega D_0 - 2k - \lambda \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{pmatrix} \delta D \\ \delta S \end{pmatrix} = 0$$

Eigenwertgleichung für Jacobimatrix

$$\det(\tilde{A}) = 0$$

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \det A \\ &= \left(\lambda + \frac{1}{T}\right) (\lambda - \omega D_0 + 2k) \end{aligned}$$

$$\text{Eigenwerte: } \lambda_1 = -\frac{1}{T} < 0$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 = \omega D_0 - 2k < 0 & \quad D_0 < \frac{2k}{\omega} \\ & \quad > 0 \quad D_0 > \frac{2k}{\omega} \end{aligned}$$

Stabilitätswechsel an der

Laserschwelle