

# Zusammenfassung —

Frohes Neues Jahr  
2013! ▽

Was bisher geschah:

- Class A und Class B Laser durch Bilanzgleichungen beschrieben
  - Analytische Ausdrücke für  
RO Frequenz  
Einschaltverzögerung  
Spiking bestimmt
- Q switching (Laser + Absorber) — Bifurkationsanalyse
- Vielmodenlaser — Lochbrennen
  - Modenexistenz bei inhomogener Verbreiterung
  - Modenselektion bei nur homogener Linienbreite

• Semiklassische Lasergleichungen hergeleitet

- Maxwell + Schrödinger Gleichung + Näherung  
RWA, SVA

- für  $\dot{p} = 0$  (adiabatisches Eliminieren der Polarisation)  
ergehen sich Lösungen identisch zum Bilanzgleichungssystem

- Gleichungen liefern Modenfrequenz beim Laserbetrieb ( $\neq$  Mode im leeren Resonator)

Heute: 2. Laserschwelle - Instabilitäten eines Class C Lasers

### 3.4.3. Stabilität der lasenden Lösung (ii)

Ansatz für steady state:

$$a(t) = \varepsilon^{ss} e^{-i(\Omega t + \varphi)} \quad (\text{Feld})$$

$$p_n(t) = p_n^{ss} e^{-i(\Omega t + \bar{\varphi})} \quad (\text{Polarisation})$$

$$d_n(t) = d_n^{ss}$$

$$\Omega, \varepsilon^{ss}, p_n^{ss}, d_n^{ss} = \text{const.}$$

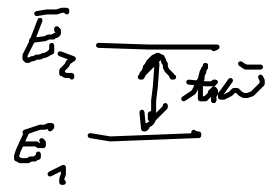
$$|\varepsilon^{ss}|^2 = I \quad \text{Intensität des Lasers im stat. Zustand}$$

$\Omega$  optische Frequenz

# Laser - Grundgleichungen

ohne inhomogene Effekte :

Übergangsfrequenz



$$\bar{\omega}_n = \bar{\omega}$$

$$g\lambda_n = g$$

$$\rho = \sum_n \rho_n$$

Inversion

$$D = \sum_n d_n$$

mit Ansatz

$$a = \epsilon e^{-i\Omega t}$$
$$\rho = \rho_0 e^{-i\Omega t}$$

$$\dot{\epsilon} = [i(\Omega - \omega) - \kappa] \epsilon - ig^* \rho_0$$

$$\dot{\rho}_0 = [-i(\Omega - \bar{\omega}) - \gamma] \rho_0 + ig D \epsilon$$

$$\dot{D} = \frac{D_0 - D}{T} + 2i (g^* \rho_0 \epsilon^* - g \rho_0^* \epsilon)$$

Weitere Annahme: exakte Resonanz von Lichtmode  $\omega$  und 2 Niveaum System  $\bar{\omega}$

$$\omega = \bar{\omega} \\ \Rightarrow \Omega = \omega \quad (\text{folgt aus Phasengleichung})$$

Stationäre Lösungen

$\Rightarrow$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= -k \varepsilon - i g^* P_0 \\ \dot{P}_0 &= -\gamma P_0 + i g D \varepsilon \\ \dot{D} &= \frac{D_0 - D}{T} + 2i (g^* P_0 \varepsilon^* - g P_0^* \varepsilon) \end{aligned} \right\}$$

$$P_0^{ss} = -\frac{g D \varepsilon^{ss}}{i \gamma}$$

$$|\varepsilon^{ss}|^2 = \frac{D_0 / D_0^{ss} - 1}{2 T W}$$

$$D_0^{ss} = \frac{2k}{W}$$

↑  
Einstein  
Koeffizient  
 $W = |g|^2 \frac{2}{\gamma}$

Normierung der Variablen auf stationäre Zustände

$$\hat{D} = \frac{D}{D_0^{ss}} \quad ; \quad \hat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^{ss}} \quad ; \quad \hat{P} = \frac{P_0}{P_0^{ss}}$$

zusätzlich wird definiert:

$$\hat{t} = t \gamma_1$$

$$\hat{k} = \frac{k}{\gamma_1}$$

$$\hat{y}_1 = \frac{1}{T \gamma_1}$$

$$\Lambda = \hat{D}_0 - 1$$

dimensionlose  
Parameter

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{t}} = -\hat{p} - \hat{D} \hat{E}$$

$$\frac{\partial \hat{E}}{\partial \hat{t}} = -\hat{k} \hat{E} - \hat{k} \hat{p}$$

$$\frac{\partial \hat{D}}{\partial \hat{t}} = (1 + \Lambda - \hat{D}) \hat{y}_1 - \hat{y}_1 \wedge \operatorname{Re} \{ \hat{p} \hat{E}^* \}$$

• Im stationären Betrieb ist  $\hat{E} = \hat{p} = \hat{D} = 1$  (für  $\Lambda > 0$ )  
hinter 1. Laserschwelle

• Wähle  $\hat{E}, \hat{p}$  reell (sonst 2 zusätzliche  
Gleichungen für die Phasen)

Nun:  
 Jacobi Matrix bei  $\hat{E} = \hat{P} = \hat{D} = 1$  bestimmen für lineare Stabilitätsanalyse

$$DF|_{FP} - \lambda \mathbb{1} = \begin{matrix} \begin{matrix} \text{"E"} \\ \text{"D"} \\ \text{"P"} \end{matrix} \\ \begin{matrix} -\hat{k} - \lambda & 0 & -\hat{k} \\ \hat{y} \Lambda & -\hat{y} - \lambda & -\hat{y} \Lambda \\ -1 & -1 & -1 - \lambda \end{matrix} \end{matrix}$$

$\frac{\partial}{\partial \hat{E}}$                    $\frac{\partial}{\partial \hat{D}}$                    $\frac{\partial}{\partial \hat{P}}$

Das Vorzeichen der Eigenwerte  $\lambda$  bestimmt Stabilität der Lösung

$$\det(DF|_{FP} - \lambda \mathbb{1}) = 0$$

$$(-k - \lambda) (\hat{y} \Lambda + \lambda \lambda + \hat{y} + \lambda + \hat{y} \Lambda) + (\hat{k}) (\hat{y} \Lambda - \lambda - \hat{y}) = 0$$

$$\textcircled{x} \lambda^3 + \lambda^2 (1 + \hat{y} + \hat{k}) + \lambda \hat{y} (1 + \Lambda + \hat{k}) + 2\hat{k} \hat{y} \Lambda = 0$$

- Charakteristisches Polynom liefert Eigenwerte
- Hopf Bifurkation (also einsetzende Pulsation des Lichtes) tritt auf, wenn  $\operatorname{Re} \lambda = 0$  und  $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$   
 $\operatorname{Im} \lambda = \omega_c$

↑ Frequenz der Oszillation

d.h. Suche Eigenwert mit  $\lambda = i\omega$

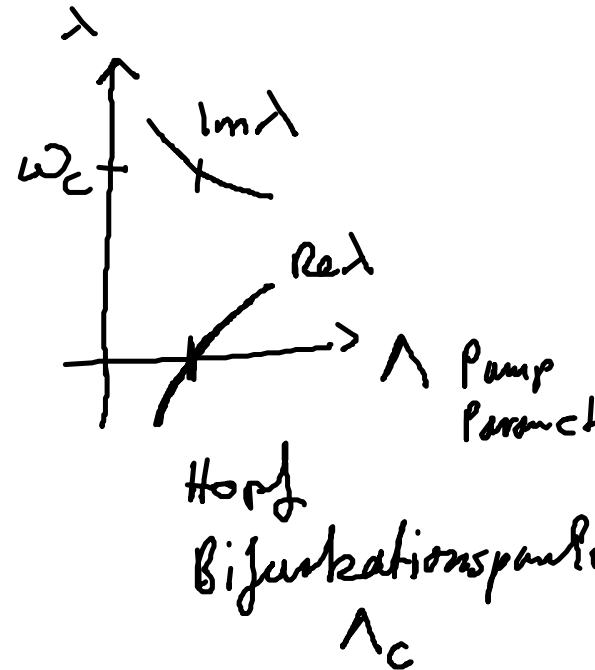
⇒ Einsetzen in Polynom (x)

$$-i\omega^3 + i\omega \hat{y}_1 (1 + \Lambda + \hat{k}) = 0$$

$$-\omega^2 (1 + \hat{y}_1 + \hat{k}) + 2\hat{k} \hat{y}_1 \Lambda = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \hat{y}_1 (1 + \Lambda + \hat{k}) \quad (1)$$

$$\omega^2 = \frac{2\hat{k} \hat{y}_1 \Lambda}{1 + \hat{y}_1 + \hat{k}} \quad (2)$$



$$\Rightarrow \textcircled{1} = \textcircled{2}$$

$$\Lambda (2\hat{k} - 1 - \hat{y} - \hat{k}) = 1 + 2\hat{k} + \hat{y} + \hat{y}\hat{k} + \hat{k}^2$$

$$\Lambda_c = \frac{(1 + \hat{k})(1 + \hat{k} + \hat{y})}{(\hat{k} - 1 - \hat{y})}$$

↖ 2. Laserschwelle

$$\textcircled{2} \text{ mit } \Lambda_c : \omega_c = 2\hat{k}\hat{y} \frac{1 + \hat{k}}{\hat{k} - 1 - \hat{y}}$$

$\Lambda_c$  nur  $> 0$  für

$$\hat{k} > 1 + \hat{y}$$

$$\frac{k}{y} > 1 + \frac{1}{T y}$$

$$k > y + \frac{1}{T}$$

↖ Bedingung für schlechten Resonator!

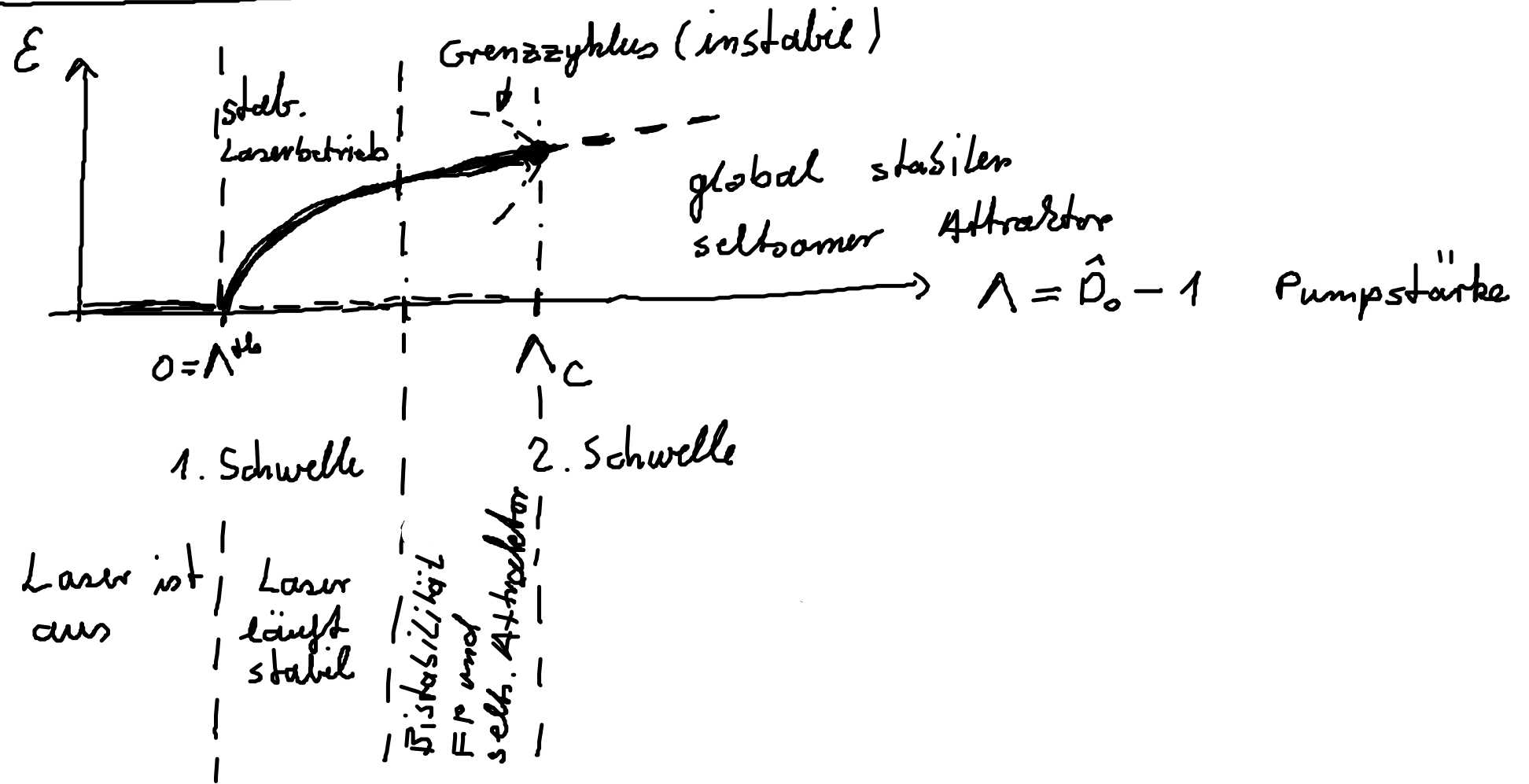


Photonlebensdauer  
(HL Laser  $\kappa \sim 0,1 \text{ ps}^{-1}$ )

$\left( \begin{array}{l} T_2 \sim 200 \text{ fs} \\ \gamma \sim 10 \text{ ps}^{-1} \end{array} \right)$   
Dephasierungszeit

Inversionslebensdauer  $\left( \begin{array}{l} T \sim 10 \text{ ps} \\ \frac{1}{T} \sim 0,1 \text{ ps}^{-1} \end{array} \right)$

d. h. 2 Laserschwelle tritt nur auf für Laser mit großem  $\kappa$ ,  
also schlechtem Resonator (nicht im HL Laser)



## Bemerkung Ringlaser

- Falls, wie im Ringlaser, die Randbedingungen eine laufende Welle zulassen, dann hat  $\vec{E}$ -Feld Gleichung die Form

$$\dot{\vec{E}} + \boxed{c \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \vec{E}} = -\vec{k} \hat{E} + \hat{k} \hat{P}$$

→ Lösungen sind laufende Wellen  
mit Wellenvektor  $k$

- für  $k \neq 0$  tritt 2. Laserschwelle schon beim guten Resonator auf  
(siehe Buch Haken  
Light Vol. 2)

## 3.4.4. Analogie zu Lorenz Gleichungen

Durch die Transformation

$$X := \vec{E} \sqrt{\hat{y} \Lambda}$$

$$y := \hat{p} \sqrt{\gamma \Lambda}$$

$$z := r - \hat{D}$$

(Kontrollparameter  $r := \Lambda + 1$ )

gehen die Lasergleichungen über in die Lorenzgleichungen! ▽

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y$$

$$\dot{y} = r x - y - x z$$

$$\dot{z} = -b z + x y$$

$$\begin{pmatrix} \sigma = \frac{1}{\tau_c} \\ b = \hat{\gamma} \end{pmatrix}$$

Bénard - Problems (Lorenz Gleichung)

Class C Laser (semiklass.)

Strömungsfeld  $x$

$E$  Lichtmode

Temperaturverteilung  $y, z$

$P, D$

Kontrollpar.  $r = \frac{R}{R_c}$  Rayleighzahl

$\hat{D}_0$  Pumpstärke

$\hat{D}_0 = \Lambda + 1$

$$\sigma = \frac{\nu}{\alpha} \quad \text{Prandtl-Zahl}$$

$$\hat{\kappa} = \frac{\kappa}{\gamma} \quad \text{Resonatorverluste}$$

$0 < r < 1$  stabiler FP  $x=y=z=0$

konduktiver Zustand  
Flüssigkeit ruht

$r=1$  konvektive Instabilität

$$1 \leq r \leq r_H$$

Stationäre Konvektionsrollen  
 $x, y, z \neq 0$

$$r = r_H$$

Rayleigh - Bénard - Instab.

$$r_H = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}$$

notwendige Bed.:  $\sigma > b + 1$

$$r > r_H$$

$\hat{D}_0 < 1$ , stabiler FP

$$E = P = 0, \quad \hat{D} = \hat{D}_0$$

nichtlasender Zustand

$\hat{D}_0 = 1$  1. Laserschwelle

$$1 \leq \hat{D}_0 \leq \Lambda_c + 1$$

Stat. Laserbetrieb

$$\hat{E} = \hat{P} = \hat{D} = 1$$

seltsamer Attraktor

2. Laserschwelle

$$\Lambda = \Lambda_c$$

$$\Lambda_c = \frac{(\kappa + \gamma)(\kappa + \gamma + \frac{1}{T})}{\gamma(\kappa - \gamma - \frac{1}{T})}$$

Bedingung:

$$\kappa > \gamma + \frac{1}{T}$$

"schlechter Resonator"

$$\Lambda > \Lambda_c$$

chaotisch oszillierende  
Konvektionsrollen

chaotisches Laserlicht