Stationäre Lösungen und Stabilität der Laser Bilanzgleichungen

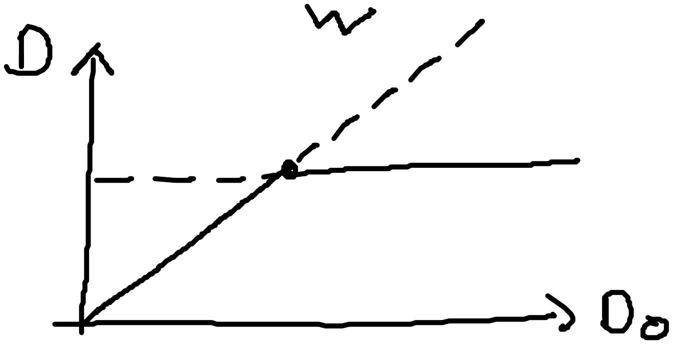
Photonendichte S,

Photonenzahl $Z = S \cdot V$

Volumen

$$\frac{dS}{dt} = WDS - 2kS$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{D_0 - D}{T} - 2WDSV$$



Inversion D

ohne spon. Emission

- An der Laserschwelle $D_0 = \frac{2k}{W}$ verzweigt sich also die stationäre Lösung, und die Stabilität wechselt

Bifurkation!

- kann nur in nichtlinearen Systemen auftreten
- an der Laserschwelle ändert sich qualitativ das Verhalten

<u>Nichtgleichgewichts-Phasenübergang</u>

↙

- fern vom therm. GG.

(GG gegeben durch Bolzmann Verteilung $\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{(E_2 - E_1)}{kT}} < 1$

$D = N_2 - N_1 < 0$

- Der Ordnungs Parameter S ändert sich stetig an der Schwelle aber nicht diff. bar

$\Longrightarrow$ Phasenübergang 2. Ordnung

2.1.2. stationäre Lösungen mit spontaner Emission

· Unterhalb der Schwelle: stimulierte Emission kann gegenüber spon. Emission vernachlässigt werden

$$\left[\begin{aligned} \frac{dD}{dt} &= \frac{D_0 - D}{T} - 2WDS\cdot V - W(N+D) \\ \frac{dS}{dt} &= WDS - 2\kappa S + \frac{1}{2}\frac{W}{V}(N+D) \end{aligned}\right]$$

$\dot{D} = 0$

für $S \xrightarrow{} \approx 0$ $\quad D_0 - D \approx TW(N+D)$

$$D \approx \frac{D_0 - TWN}{} < D_0$$

$1 + TW$

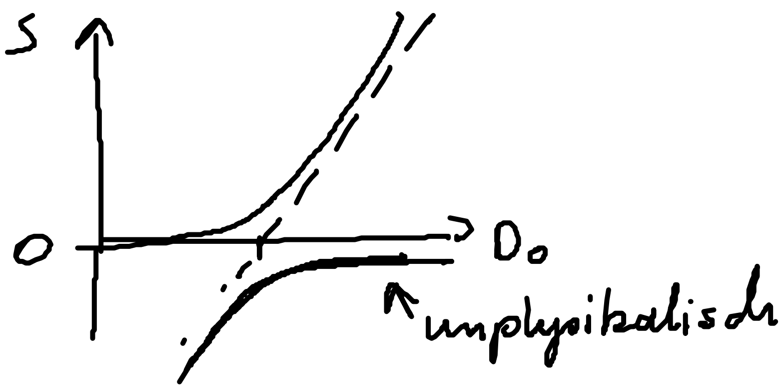
$$\dot{S} = 0$$

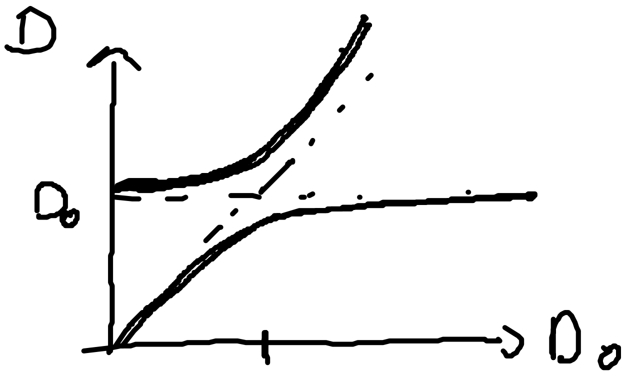
für $s \approx 0 \rightarrow S \approx \dfrac{\frac{W}{2V}(N+D)}{2K - WD} \approx \dfrac{\frac{W}{V}(N+D_0)}{4K(1+TW) - 2W(D_0 - TWN)}$

wächst mit D_0

grafische Veranschaulichung der

<u>Lösungen von $\dot{S}=0$ & $\dot{D}=0$</u>

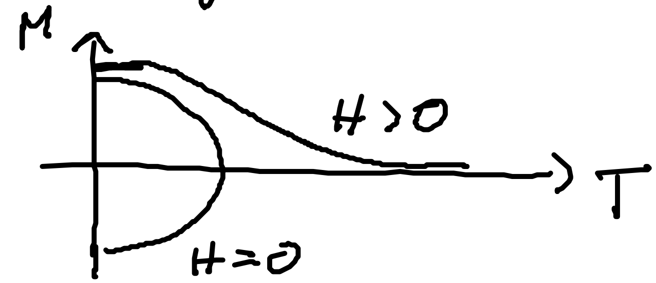




- es existiert für alle D_0 ein eindeutiger, stabiler stationärer Zustand

$\frac{2K}{W}$

- Der Phasenübergang 2. Ordnung wird durch die spontane Emission zerstört
  (vgl. die Wirkung eines Magnetfeldes auf Ferromagneten



2.1.3. Relaxationsoszillationen

(Stabilität des zweiten Fixpunktes $S \neq 0$)

- spontane Emission vernachlässigt (klein wenn Laser läuft)
- oberhalb der Schwelle $D_0 > \frac{2K}{W}$

$\left[2K = \tau_{ph}^{-1} \right]$ Photonenlebensdauer

Jakobi-Matrix am Fixpunkt (ii) $\boxed{D^* = \frac{2K}{W} \; ; \; S^* = \frac{D_0 W - 2K}{4KTW \cdot V}}$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \delta D \\ \delta S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T} - 2WS^* \cdot V & -2WD^* \cdot V \\ WS^* & WD^* - 2K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta D \\ \delta S \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{P}{T} & -4K \cdot V \\ \frac{2K(P-1)}{4KT \cdot V} & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \delta D \\ \delta S \end{pmatrix}$$

effektiver Pumpparameter $p = \frac{w}{2\kappa} D_0$

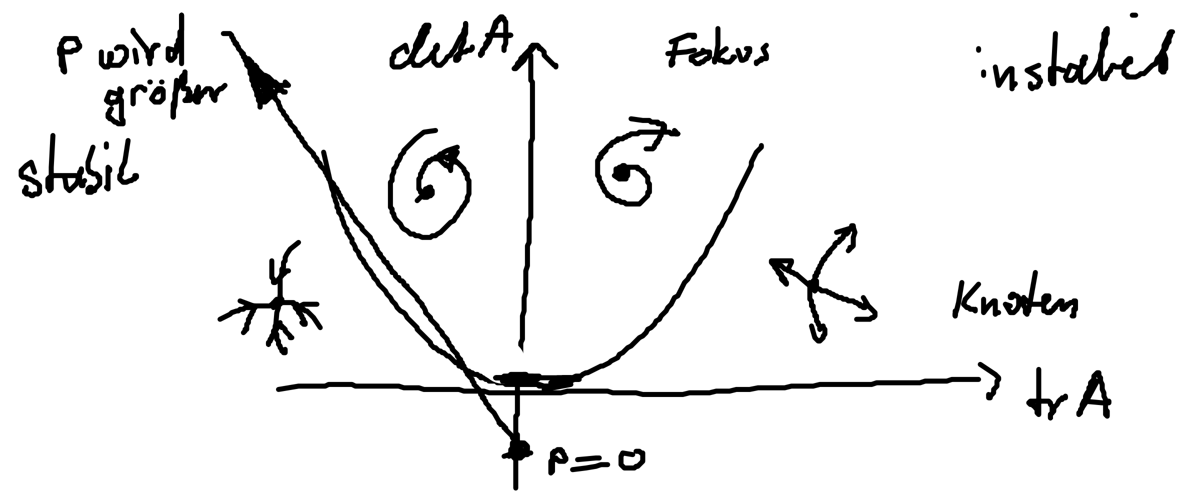
Säkulargleichung: $\lambda^2 - \lambda \, \mathrm{tr} A + \det A = 0$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{tr} A &= -\frac{p}{T} < 0 \\ \det A &= \frac{2\kappa(p-1)}{T} > 0 \end{aligned}\right\} \text{ für } p > 1$$

Bem: $\mathrm{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 < 0$

$\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ $\Rightarrow$ Stabilität

→ Fixpunkt ist stabil



• 2 Fälle für Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mathrm{tr}A \pm \sqrt{(\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A}}{2}$$

(i) EW imaginär

(ii) EW reell

(i) $\det A > 0$, $\mathrm{tr}A < 0$, $(\mathrm{tr}A)^2 < 4\det A$

$$\lambda_{1.2} = -\Gamma \pm i\omega$$

komplex konjugiert

$$-\Gamma = \mathrm{Re}\,\lambda_{1.2} < 0$$

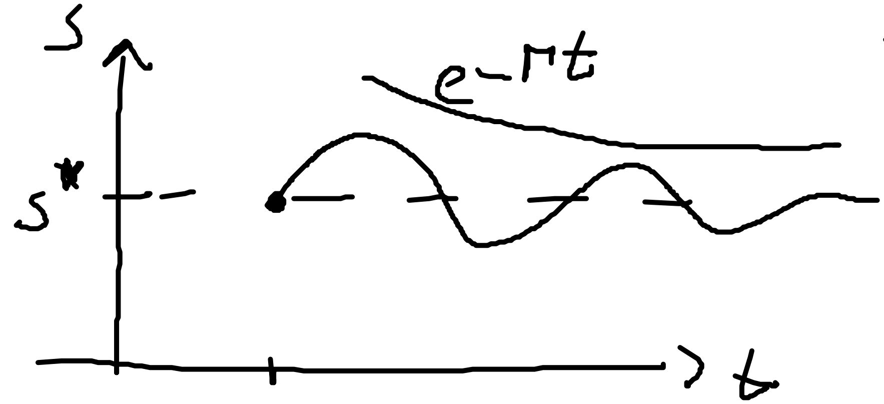
mit $\Gamma = -\frac{\mathrm{tr}A}{2} = \frac{\rho}{2T}$ Dämpfungskonstante

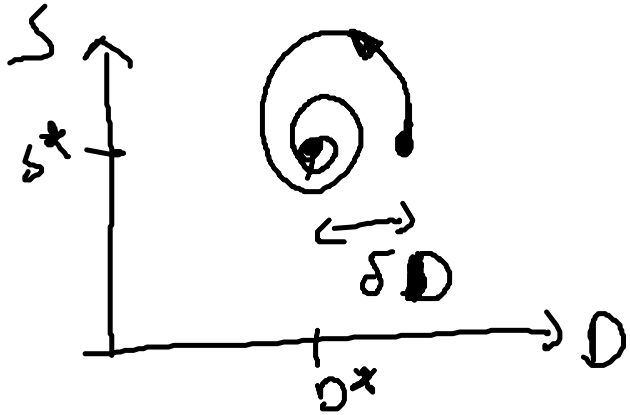
$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8K}{T}(P-1) - \frac{P^2}{T^2}}$$ Oszillations-frequenz

allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} \delta D \\ \delta S \end{pmatrix} = c_1 \eta_1 e^{(-\Gamma + i\omega)t} + c_2 \eta_2 e^{(-\Gamma - i\omega t)}$$

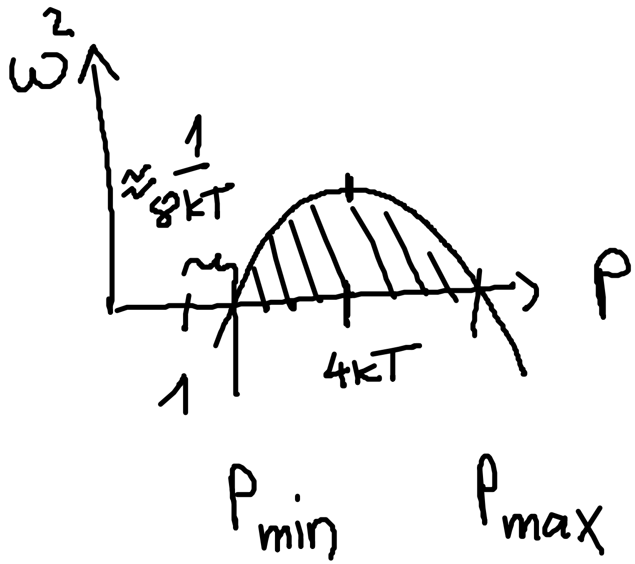
gedämpfte Oszillationen : Relaxationsoszillationen (RO)





← Phasenraum

- stabiler Fokus (strudelpunkt)
  - Trajektorien sind Spiralen



$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8k}{T}(P-1) - \frac{P^2}{T^2}}$$

- an der Schwelle treten keine RO auf sondern erst für $P > \frac{1}{8kT}$

- Bereich der RO ist begrenzt durch P_{min} und P_{max}

- Notwendige Voraussetzung

$$2\kappa T > 1$$

$$\frac{T}{\tau_{ph}} > 1$$

"Elektronen müssen länger als Photonen in der Kavität"

- $2\kappa T \gg 1$ Zeitskalentrennung
  je größer $2\kappa T$ desto ausgeprägter sind die RO
  Zeitskalenparameter $\gamma = \frac{\tau_{ph}}{T} = (2\kappa T)^{-1}$

$\boxed{\text{Class B Laser}}$

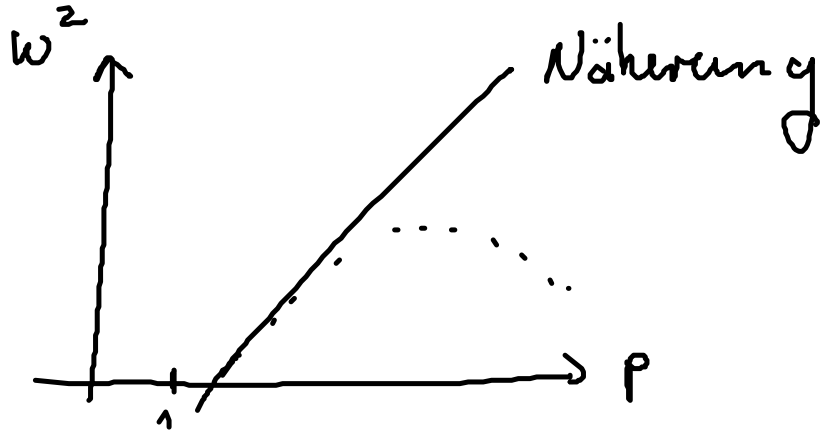
(wenn $\gamma_\parallel$ klein
$2kT \gg 1$)

Größenordnungen

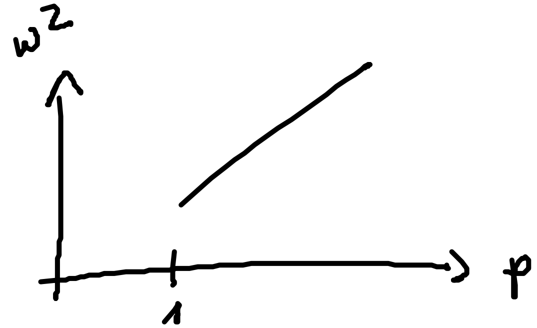
Laser	τ_{ph} (s)	T (s)	$\gamma_\parallel$	
CO_2	10^{-8}	$4 \cdot 10^{-6}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$	Class B
Halbleiter GaAs	10^{-12}	10^{-9}	10^{-3}	
HeNe	10^{-7}	10^{-8}	>1	

Näherung für $P \ll 4kT$ und somit $\frac{p^2}{T^2} \ll \frac{8k}{T}(P-1)$

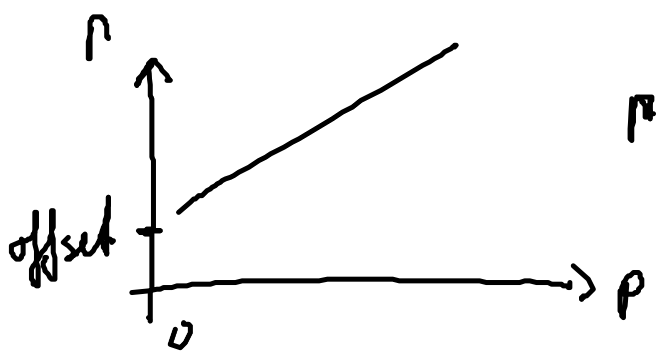
$$\Rightarrow \omega^2 \approx \frac{2k}{T}(P-1)$$



Messung



$\rightarrow$ Bestimmung von τ_{pb} oder T möglich



$$\Gamma = \frac{p}{ZT}$$

$\rightarrow$ Bestimmung von T möglich