3.4. Stationäre Lösungen und Stabilität der Laser-grundgleichungen im Ein-Moden Betrieb

- betrachte eine (stehende) Mode λ der Frequenz $\omega_\lambda = \omega$
- inhomogen verbreiterte Linie. d.h. $\bar{\omega}_n$ von n abhängig

Grundgleichungen des Lasers

(I') $$\dot{a} = (-i\omega - \kappa)a - i\sum_n g_{\lambda n}^* \rho_n$$ Feldgleichung

(II') $$\dot{\rho}_n = (-i\bar{\omega}_n - \gamma)\rho_n + i g_{\lambda n} d_n a$$ Polarisationsgleichung

(III') $$\dot{d}_n = \frac{d_0 - d_n}{T} + 2i\left(g_{\lambda n}^* \rho_n a^* - g_{\lambda n} \rho_n^* a\right)$$ Inversionsgleichung

3.4.1. stationäre Lösungen

(i) $a = 0$
$p_n = 0$ kein Laserbetrieb
$d_n = d_0$ (unterhalb der Schwelle)

(ii) Ansatz für stationäre Schwingungen des Lichtfeldes

$$a(t) = \mathcal{E}^{ss}\, e^{-i(\Omega t + \varphi)}$$

($\mathcal{E}^{ss}$ reell gewählt)
$|\mathcal{E}^{ss}|^2$ Photonenzahl der Mode λ

$$p_n(t) = p_n^{ss}\, e^{-i(\Omega t + \bar{\varphi})}$$

Ω Laserfrequenz (darf von ω abweich…

$$d_n = d_n^{ss} = \text{const}$$

[Annahme $\varphi = \bar{\varphi} = 0$]

d_n^{ss}, $\mathcal{E}^{ss}$, Ω und p_n^{ss} müssen bestimmt werden!

Einsetzen in ($I' - III'$):

$$0 = \dot{\mathcal{E}}^{ss} = [i(\Omega - \omega) - \kappa]\, \mathcal{E}^{ss} - i \sum_n g_{\lambda n}^{*}\, p_n^{ss} \qquad (I'')$$

$$0 = \dot{p}_n^{ss} = [i(\Omega - \bar{\omega}_n) - \gamma]\, p_n^{ss} + i g_{\lambda n}\, d_n^{ss}\, \mathcal{E}^{ss} \qquad (II'')$$

$$0 = \dot{d}^{ss} = \frac{d_0 - d_n^{ss}}{T} + 2i\left(g\lambda_n^* p_n^{ss} \mathcal{E}^{ss} - c.c. \right) \qquad (\mathrm{III}'')$$

$$(\mathrm{II}'') \Rightarrow \boxed{p_n^{ss} = \frac{-ig\lambda_n d_n^{ss} \mathcal{E}^{ss}}{i(\Omega - \bar{\omega}_n) - \gamma}} \qquad (*)$$

- stationärer Zusammenhang zwischen Polarisation, Feld und Inversion

Bem: falls $\gamma \gg \kappa, \frac{1}{T}$ gilt dieser Zusammenhang auch fern vom stationären Zustand falls $t > \frac{1}{\gamma}$

„Versklavungsprinzip" von Haken
„Prinzip des adiabatischen Eliminierens"

(*) einsetzen in (III'')

$$0 = \dot{d}_n^{ss} = \frac{d_0 - d_n^{ss}}{T} - 2i\left(\frac{|g\lambda_n|^2 |\mathcal{E}^{ss}|^2 d_n^{ss}}{(\Omega - \bar{\omega}_n) + i\gamma} - c.c. \right)$$

$$\dot{d}_n^{ss} = \frac{d_0 - d_n^{ss}}{T} - 2 d_n^{ss} |\mathcal{E}^{ss}|^2 \underbrace{|g_{\lambda n}|^2 \frac{2\gamma}{(\Omega - \bar{\omega}_n)^2 + \gamma^2}}_{W_{\lambda n}} \qquad (\mathrm{III}'')$$

$W_{\lambda n}$: Einstein Koeffizient der induzierten Emission (jetzt hergeleitet!)

- <u>neu</u>: Laserfrequenz Ω kann abweichen von Modenfrequenz ω

(<u>Bem</u>: Gleichung III''' ergibt falls $W_{\lambda n} = W$ mit $D = \sum_n d_n$

$$\dot{D} = \frac{D_0 - D}{T} - 2 D W S_\lambda$$

$\Rightarrow$ adiabatisches Eliminieren von ρ liefert Bilanzgleichung)

$0 = \dot{d}_n^{ss}$
$\Rightarrow$

$$\boxed{d_n^{ss} = \frac{d_0}{1 + 2 T W_{\lambda n} |\mathcal{E}^{ss}|^2}}$$

$*_3$

stationäre Lösung für Inversion identisch mit Lösung der Bilanzgleichung

(*) einsetzen in (I'')

$$\left[i(\Omega - \omega) - \kappa + i \sum_n \frac{|g\lambda_n|^2}{\Omega - \overline{\omega}_n + i\gamma_1} d_n^{ss} \right] \mathcal{E}^{ss} = \dot{\mathcal{E}}^{ss} = 0$$

separiert in Real und Imaginarteil ($\mathcal{E}^{ss}$ reell gewählt) ergibt die 2 gleichungen

$$\text{Im}: \left[\Omega - \omega + \sum_n |g\lambda_n|^2 \frac{\Omega - \overline{\omega}_n}{(\Omega - \omega_n)^2 + \gamma_1^2} d_n^{ss} \right] \mathcal{E}^{ss} = 0$$

$$\text{Re}: \left[-\kappa + \sum_n |g\lambda_n|^2 \frac{\gamma_1}{(\Omega - \overline{\omega}_n)^2 + \gamma_1^2} d_n^{ss} \right] \mathcal{E}^{ss} = 0$$

- entspricht der stationären Bilanzgleichung der Photonen

$$\left[-\kappa + \sum_n \frac{1}{2} W_{\lambda n} d_n^{ss} \right] \varepsilon^{ss} = \dot{\varepsilon}^{ss}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_n \frac{1}{2} W_{\lambda n} d_n^{ss} = \kappa} \quad (*_2)$$

- die Gleichung für den Imaginärteil liefert zusätzlich die Laserfrequenz Ω

α) homogene Linienbreite ($\bar{\omega}_n = \bar{\omega}$ nicht n abhängig)

$$\omega - \Omega = - \frac{\bar{\omega} - \Omega}{2\gamma_\perp} d_0 \underbrace{\sum_n \frac{W_{\lambda n}(\Omega)}{1 + 2 T W_{\lambda n} |\varepsilon^{ss}|^2}}_{2K \text{ wegen } (*_2), (*_3)}$$

$$\omega + \bar{\omega} \frac{K}{\gamma_\perp} = \Omega \left(1 + \frac{K}{\gamma_\perp} \right)$$

$$\boxed{\Omega = \omega \frac{\gamma_\perp}{\gamma_\perp + \kappa} + \bar{\omega} \frac{\kappa}{\gamma_\perp + \kappa}} \quad (*)_4$$

$a^{ss} = \mathcal{E}^{ss} e^{i\Omega t}$

- Die Modenfrequenz des leeren Resonator ω wird durch WW zwischen Licht und Materie zu Ω verschoben

- Verschiebung wächst wenn κ auf gleicher Größenskala wie $\gamma_\perp$

- falls $\gamma_\perp \gg \kappa \rightarrow \Omega = \omega$
  keine Verschiebung
  (Bilanzgleichungsfall)

b) inhomogene verbreiterte Linie
- die Frequenzverschiebung $\omega - \Omega$ hängt zusätzlich von Photonenzahl $|\mathcal{E}^{ss}|^2$ ab
  $\rightarrow$ komplizierte nichtlineare Gleichung für Ω

3.4.2. Stabilität der stationären Lösung

(i) $a, p_n'' = 0$

Spezialfall $\bar{\omega}_n = \omega$ (exakte Resonanz)

$g\lambda_n = g$

$P = \sum_n p_n$

$D = \sum_n d_n$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{a} &= (-i\omega - \kappa)\, a - i g^* P \\ \dot{P} &= (-i\omega - \gamma)\, P + i g D a \\ \dot{D} &= \frac{D_0 - D}{T} + 2i\,(g^* P a^* - g P^* a) \end{aligned}}$$

Linearisieren um Fixpunkt $\begin{matrix} p=0 \\ \alpha=0 \end{matrix}$

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{a} \\ \delta\dot{p} \\ \delta\dot{D} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -i\omega-\kappa & -ig^* & 0 \\ igD_0 & -i\omega-\gamma & 0 \\ 0 & 0 & -1/T \end{pmatrix}}_{A = DF|_{(i)}} \begin{pmatrix} \delta a \\ \delta p \\ \delta D \end{pmatrix}$$

$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$

Säkulargleichung für Eigenwerte λ

$$\underbrace{\left(\lambda+\frac{1}{T}\right)}_{\lambda_1 = -\frac{1}{T}} \underbrace{\left(\lambda^2 + \lambda(2i\omega+\kappa+\gamma) + (i\omega+\kappa)(i\omega+\gamma) - |g|^2 D_0\right)}_{\text{gekoppelte Eigenmoden von Dipolmoment und Feldmoden}} = 0$$

Relaxation der Inversion beschrieben durch λ_1

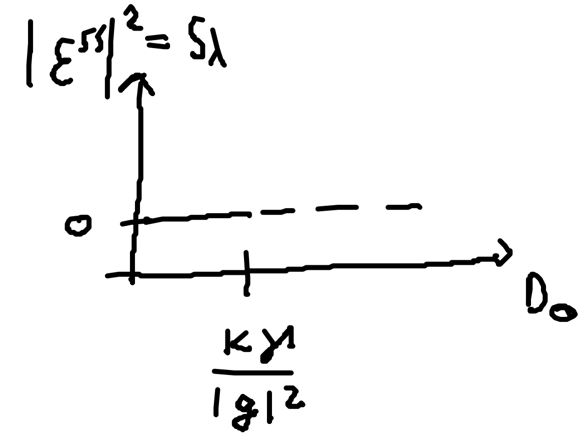
$$\lambda_{2,3} = \underbrace{-i\omega}_{\text{Oszillation}} \underbrace{- \frac{\kappa+\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\kappa-\gamma}{2}\right)^2 + |g|^2 D_0}}_{\text{Dämpfung } (<0) \text{ oder Entdämpfung } (>0)}$$

Der nicht lasende stationäre Zustand ist stabil falls $\mathrm{Re}\,\lambda_2 < 0$. [Es gilt stets $\mathrm{Re}\,\lambda_3 < 0$]

$$\text{d.h.} \quad \frac{\kappa + \gamma}{2} > \sqrt{\left(\frac{\kappa - \gamma}{2}\right)^2 + |g|^2 D_0}$$

$$\kappa\gamma > |g|^2 D_0$$

$$D_0 < \frac{\kappa\gamma}{|g|^2}$$



Laserschwelle $\boxed{D_0^{th} = \frac{\kappa\gamma}{|g|^2}}$

Bem: wegen $W_{\lambda n} = |g|^2 \frac{2}{\gamma}$ für $\bar{\omega}_n = \omega_\lambda = \Omega$ ist die Laserschwelle identisch mit $D_0^{th} = \frac{2\kappa}{W} = \frac{2\kappa\gamma}{|g|^2 \cdot 2}$, das für Bilanzgleichungen hergeleitet wurde.

$\Rightarrow$ Nicht lasender Zustand wird an der Schwelle $D_0^{th} = \frac{\kappa \gamma_\perp}{|g|^2}$ instabil.

Frage: Ist der stationäre lasende Zustand beschrieben durch $*_{1-4}$ stabil?

Lösung gegeben durch:

$$\kappa = \sum_n \frac{1}{2} W_{\lambda n} d_n^{ss} \quad \text{aus } *_2$$

$$W_{\lambda n} = \frac{2|g_{\lambda n}|^2 \gamma_\perp}{(\Omega - \bar{\omega}_n)^2 + \gamma_\perp^2}$$

$$\Omega\left(1 + \frac{\kappa}{\gamma_\perp}\right) = \omega + \frac{1}{2\gamma_\perp} \sum_n \left(W_{\lambda n} d_n^{ss} \bar{\omega}_n\right) \quad \text{aus } *_4$$

$$|\mathcal{E}^{ss}|^2 = \frac{\frac{d_0}{d_n^{ss}} - 1}{2 T W_{\lambda n}} \quad \text{aus } *_3$$

$$\boxed{p_n^{ss} = -\frac{g_{\lambda n}\, d_n^{ss}\, \mathcal{E}^{ss}}{\Omega - \bar{\omega}_n + i\gamma}}$$ aus ⊗

dies sind 2n+2 Bestimmungsgleichung für Fixpunkt (ii)

Für $\bar{\omega}_n = \bar{\omega}$ (keine Abhängigkeit von n)

$W_{\lambda n} = W$

$g_{\lambda n} = g$

$$\boxed{|\mathcal{E}^{ss}|^2 = \frac{\frac{D_0}{D^{ss}} - 1}{2TW} \quad ; \quad D^{ss} = \frac{2K}{W} \qquad p^{ss} = \frac{g\, D\, \mathcal{E}^{ss}}{\Omega - \bar{\omega} + i\gamma} \quad ; \quad \Omega\left(1 + \frac{K}{\gamma}\right) = \omega + \bar{\omega}\frac{K}{\gamma}}$$