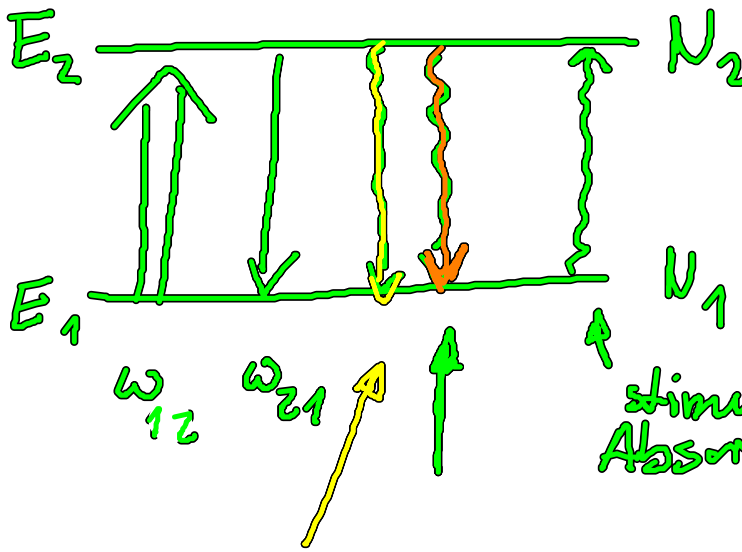
Nichtlineare Laserdynamik

2. Bilanzgleichungen – Laser Ratengleichungen



stimulierte Absorption $\sim N_1 S$

2 Niveau System

N_2 Besetzungszahl von E_2

Spontane Emission $\sim N_2$

Stimulierte Emission $\sim N_2 S$

W: Einstein Koeffizient

V: optisches Volumen

- Lichtintensität beschreiben durch Photonendichte S

Änderung von S:

$\tau_p = (2k)^{-1}$ Photonen-Lebensdauer

$$\text{(I)} \quad \frac{dS}{dt} = \underbrace{W(N_2 - N_1)S}_{\text{stimulierte Emission} \quad \text{Absorption}} + \underbrace{\frac{W}{V} N_2}_{\text{spontane Emission}} - \underbrace{2kS}_{\text{Verluste im Resonator}}$$

Photonenzahl $Z = S \cdot V$

$$\text{(II)} \quad \frac{dN_2}{dt} = \underbrace{w_{12} N_1}_{\text{Pumprate}} - \underbrace{w_{21} N_2}_{\text{nichtstrahlende Verlustrate}} - \underbrace{(N_2 - N_1) W Z}_{\text{induzierte Prozesse}} - \underbrace{W N_2}_{\text{spon. Emission}}$$

(III) $$\frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_2}{dt}$$

Gesamtzahl der Atome in Kavität N

$N_1 + N_2 = N$

- 3 dynamische Variablen N_1, N_2, S

mit Nebenbedingung

→ Reduzien auf 2 Variablen ist sinnvoll

S

$D = N_2 - N_1$

2.1. Ein-Moden-Laser

V

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= WDS - 2\kappa S + \frac{1}{2}\frac{W}{V}(N+D) \\ \frac{dD}{dt} &= \frac{D_0 - D}{T_\cdot} - \underbrace{2WDS\cdot V}_{2} - W(N+D) \end{aligned}}$$

Nichtlineare Gleichungs-System für Laserdynamik

(folgen direkt aus I und II)

$$T_2 = \frac{1}{w_{21} + w_{12}}$$

$\hat{=}$ Zeitkonstante der Relaxation von D_0 auf D
Lebensdauer der Elektronen

$$D_0 := N \frac{w_{12} - w_{21}}{w_{21} + w_{12}}$$

$\hat{=}$ Pumprate

2.1.1. Stationäre Lösungen (ohne spontane Emission)

$$\frac{dD}{dt} = 0 \implies D_0 - D = 2TWDSV \qquad (1)$$

$$\frac{dS}{dt} = 0 \implies 0 = (WD - 2K)S$$

Es existieren 2 Lösungen

(i) $S = 0 \overset{(1)}{\implies} \boxed{D = D_0}$ keine Lasertätigkeit

(ii) $S \neq 0$, $D = \frac{2K}{W} \overset{(1)}{\implies}$

$$\boxed{S} = \frac{\boxed{D_0} W - 2K}{4KTW \cdot V}$$

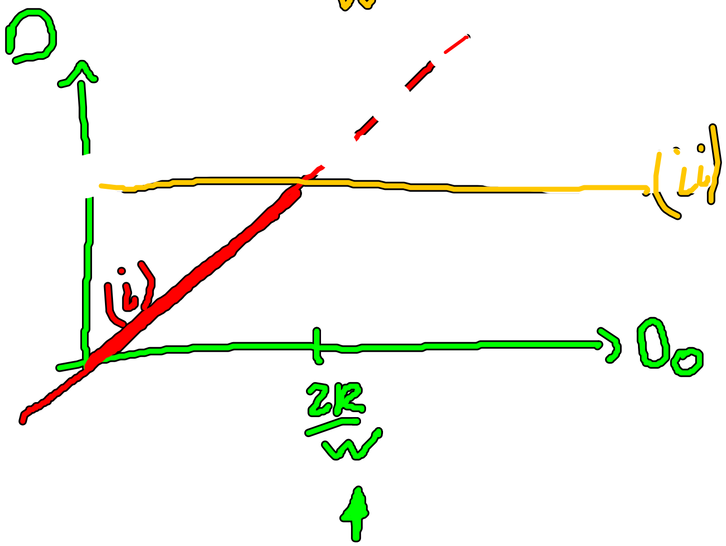
Laser ist an

• 2 Lösungen für alle

Pumpstärke

Pumpstärken

• Frage: Stabilität?



Laserschwelle

• Stabilität gegenüber kleinen Störungen der stationären Lösungen (Fixpunkte)

(i) $S^* = 0$ Lösung ohne Lasertätigkeit

$D^* = D_0$

klein!

$S(t) = S^* + \delta S(t)$

$D(t) = D^* + \delta D(t)$

Neue Variablen für die lineare Gleichung gesucht wird

eingesetzt in $\underline{\overline{V}}$ Bilanzgleichung

$$\frac{d}{dt}\delta D = \frac{D_0 - D^* - \delta D}{T} - 2W(D^* + \delta D)(S^* + \delta S)\cdot V$$

$$\approx -\frac{\delta D}{T} - 2WD^*\delta S\cdot V$$

– quadratische Terme $\delta D \cdot \delta S$ werden vernachlässigt

$$\frac{d}{dt}\delta S \approx W D^* \delta S - 2k\delta S$$

kompakt:
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\delta D\\ \delta S\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}-\frac{1}{T} & -2WD_0\gamma \\ 0 & WD_0 - 2k\end{pmatrix}}_{\text{Jacobi Matrix } A \text{ des dyn. Systems am Fixpunkt}} \begin{pmatrix}\delta D\\ \delta S\end{pmatrix} \qquad (2)$$

Lösungsansatz $\begin{pmatrix}\delta D\\ \delta S\end{pmatrix} \sim e^{\lambda t}$

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{T}-\lambda & -2WD_0 \cdot V \\ 0 & WD_0-2k-\lambda \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{pmatrix} \delta D \\ \delta S \end{pmatrix} = 0$$

Eigenwertgleichung für Jacobimatrix

$$\det(\tilde{A}) = 0$$

$$0 = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \det A$$

$$= \left(\lambda + \frac{1}{T}\right)\left(\lambda - WD_0 + 2k\right)$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = -\frac{1}{T} < 0$

$\lambda_2 = WD_0 - 2k < 0 \quad D_0 < \frac{2k}{w}$

$> 0 \quad D_0 > \frac{2k}{w}$

Stabilitätswechsel an der

Laserschwelle