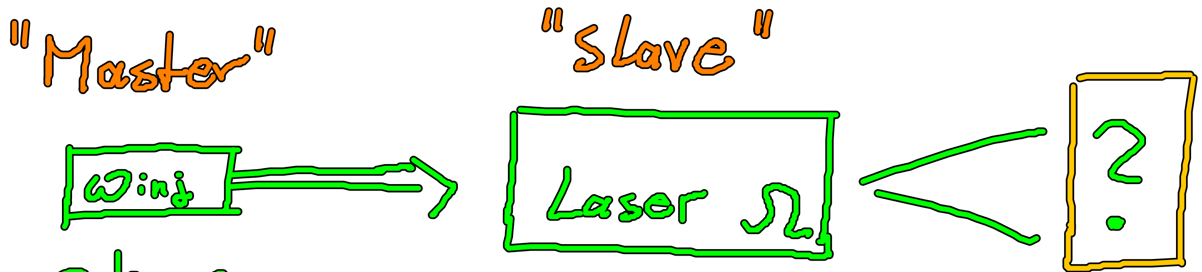
# 4. Laser mit optischer Injektion

Setup




externe Lichtinjektion

$E^{inj} = |E^{inj}| e^{-i\omega_{inj} t}$

↑ ohne ext. Injektion Lichtemission mit Frequenz $\Omega$

Fragestellung: Wie beeinflusst die Injektion die Lichtemission des Slave Lasers?

Beschreibungsebene: • Semiklassische Gleichungen mit eliminierter Polarisation (Annahme $\gamma$ im Slave Laser groß)

• nur eine Mode im Slave Laser

Aus Grundgleichung in 3.4. folgt mit $\dot{p}_n = 0$ der statische Zusammenhang:

$$p_n = \frac{g_{\lambda n} d_n \mathcal{E}}{(\bar{\omega}_n - \Omega) - i\gamma}$$

$$\dot{p}_n = p_n\left[i(\Omega - \bar{\omega}_n) - \gamma\right] + i g_{\lambda n} d_n \mathcal{E}$$

$$W_{\lambda n} = \frac{2\gamma |g_{\lambda n}|^2}{(\Omega - \bar{\omega}_n)^2 + \gamma^2}$$

Einstein Koeff.

Die Feldgleichung für $a = \mathcal{E} e^{-i\Omega t}$ wird zu

$$\dot{\mathcal{E}} = \left[ i(\Omega - \omega) - \kappa + i \sum_n \frac{|g_{\lambda n}|^2}{(\Omega - \bar{\omega}_n) + i\gamma} d_n \right] \mathcal{E}$$

$$(\mathrm{I}) \quad \dot{\mathcal{E}} = \Big\{ \underbrace{i\Big[\Omega - \omega + \sum_n \frac{\Omega - \bar{\omega}_n}{2\gamma} W_{\lambda n} d_n\Big]}_{\mathrm{Im}\{\mathrm{Gain}\}} + \underbrace{\sum_n \tfrac{1}{2} W_{\lambda n} d_n - \kappa}_{\mathrm{Re}\{\mathrm{Gain}\}} \Big\} \mathcal{E}$$

$(\dot{\mathcal{E}} = \mathrm{Gain} \cdot \mathcal{E})$

Im{Gain} (Phasenshift)

Re{Gain} (Verstärkung)

und für $\dot{d}_n$ ergibt sich:

$$(\mathrm{II}) \quad \dot{d}_n = \frac{d_0 - d_n}{T} - 2 d_n W_{\lambda n} |\mathcal{E}|^2$$

für $\gamma \gg \kappa$ ist $\Omega \approx \omega$

$$\Rightarrow \dot{\mathcal{E}} = \underbrace{\left\{ \frac{1}{2} \sum_n d_n \left[ i \, \frac{\omega - \bar{\omega}_n}{\gamma} + 1 \right] W_{\lambda n} - \kappa \right\}}_{\text{komplexer Gain}} \mathcal{E}$$

## 4.1. Amplituden – Phasen Kopplung

- falls keine inhomogene Breite (also keine n-Abhängigkeit) vorliegt ergibt sich für die Verstärkung des $\mathcal{E}$-Feldes

$W_{\lambda n} = W$

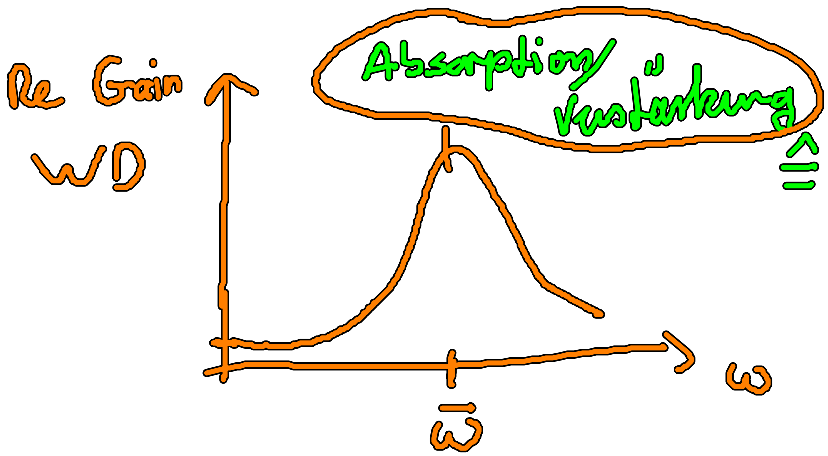
$$\text{Gain} := \frac{1}{2} W D \left( 1 + i \, \frac{\omega - \bar{\omega}}{\gamma} \right) - \kappa$$

$D = \sum_n d_n$

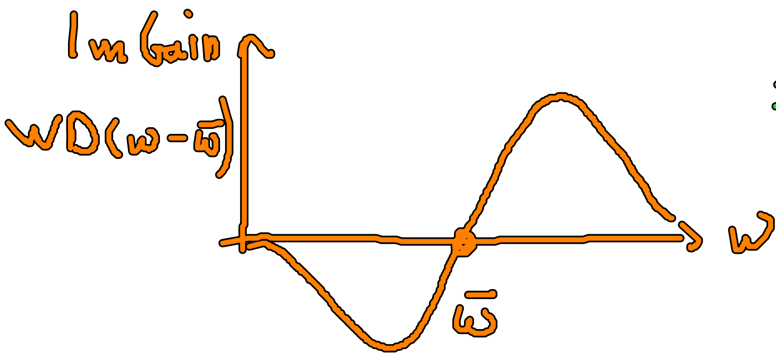
$W$ ist frequenzabhängig

- in diesem Fall gilt: - Gain linear in der Inversion $D$
  - Inversion koppelt nur an Realteil von $\mathcal{E}$

→ keine Amplituden Phasen Kopplung




$\hat{=} \ \mathrm{Im}\, \chi$




$\hat{=} \ \mathrm{Re}\, \chi$

<u>Suszeptibilität:</u>

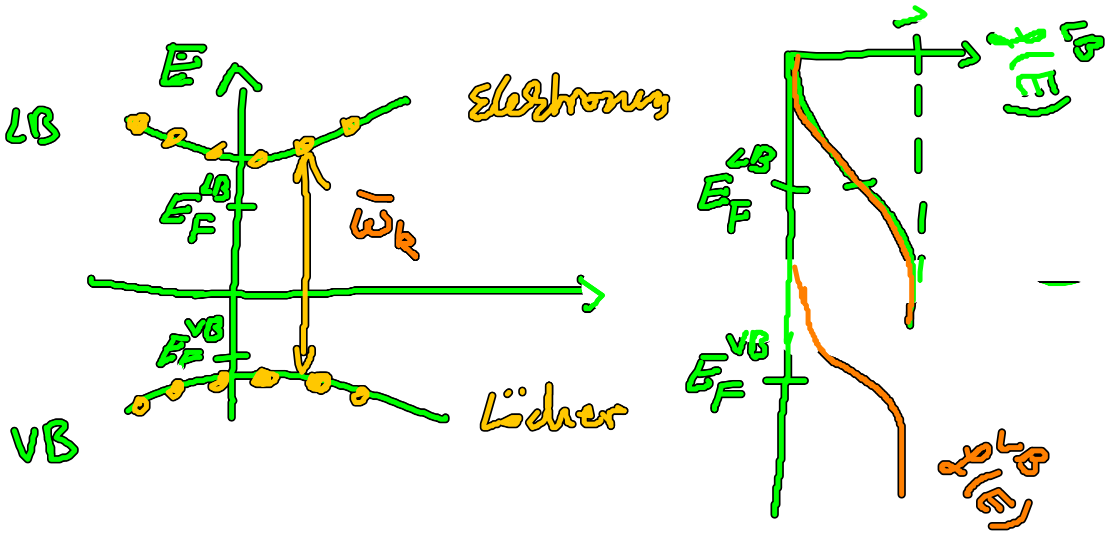
$$P\left(\sim \sum_n p_n\right) = \varepsilon_0 \chi \cdot E$$

$$\dot{E} = \underbrace{i\varepsilon_0 \chi}_{\text{Gain} + \kappa} E - \kappa E$$

↗ gilt für
Atomlaser mit gleichen Atomen oder für Quantenpunktlaser ohne Größenvariation der Quantenpunkte

## 4.2. Halbleiterlaser

Statt verschiedenen Atomen mit Index n müssen k-Zustände im Band betrachtet werden




Besetzung der Zustände im Band im quasi-Gleichgewicht gegeben durch Fermiverteilung $f(E)$

Ladungsträgerzahl $N = \sum_k f_k = V \int f(E)\, D(E)\, dE$ im Band

verändert sich wenn sich das Ferminiveau $E_F$ ändert (z.B. durch Strom-injektion)

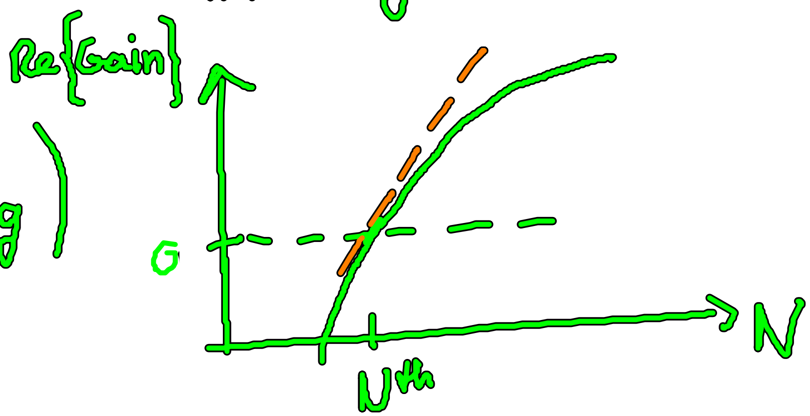
$\boxed{\text{Berechnung des Gains im HL}}$: $\mathrm{Re}\{\mathrm{Gain}\} = \sum_k W_{\lambda k} \left( f_k^{LB} - f_k^{VB} \right) - K$

$k$

↑ enthält Bandstruktureigenschaften des HL

- Im allgemeinen ergibt sich ein komplexer Zusammenhang mit $N$

<u>Bsp</u>: (numerische Modellierung)




- viele Eigenschaften lassen sich gut mit linearer Gain Näherung beschreiben

- Ansatz $\mathrm{Re}\{Gain\} = G_N'(N - N_{th}) - K$

- gleiche Argumentation für $\mathrm{Im}\{Gain\}$

$$\mathrm{Im}\{Gain\} = g_N''(N - N_{th})$$

<u>Näherung</u>: Frequenz schiebt linear mit Ladungsträgerzahl

Frage: Wie hängen $G_N'$ und $g_N''$ voneinander ab?

- Einführen eines phänomenologischen Faktors

$\alpha$ - Faktor / Linienbreiten - vergrößernder Faktor

als Maß für Amplituden - Phasen - Kopplung

Brechungsindexänderung

$$\boxed{\alpha} = \left.\frac{\frac{\partial \chi'}{\partial N}}{\frac{\partial \chi''}{\partial N}}\right|_{\omega, N} = \left.\frac{\frac{\partial \, \mathrm{Im}\{Gain\}}{\partial N}}{\frac{\partial \, \mathrm{Re}\{Gain\}}{\partial N}}\right|_{\omega, N} \left[ = \frac{g_N''}{G_N'} \right]$$

lineare Näherung für den Gain

linearer Gain $G_N'$

– es kann auch nach anderen Größen abgeleitet werden (fällt mit Kettenregel raus)

– $\alpha$ ist immer Null für 2 Niveau System (symmetrische Gainspektren)

$\Rightarrow$ es ergibt sich für

$\mathcal{E}$-Feld Gleichung des Halbleiterlasers (semiklass., ohne p)

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}} &= (G_N + i g_N)(N - N_{th})\mathcal{E} \\ &= G_N(1 + i\alpha)\tilde{N}\mathcal{E} \\ \dot{\tilde{N}} &= J - J_{th} - \frac{\tilde{N}}{T_1} - (G_N\tilde{N} + 2k)|\mathcal{E}|^2 \end{aligned}}$$

$\tilde{N} = N - N_{th}$

Lebensdauer der Elektronen im Band

elektrischer Pumpstrom

# 4.3. Adler Gleichung (getriebener Phasenosz.)

Master $\boxed{\omega_{inj}}$ → Slave $\boxed{\Omega}$ → $\dot{\phi}(t)$

$\phi_{inj} = \omega_{inj} t$ $\qquad$ $\phi(t)$

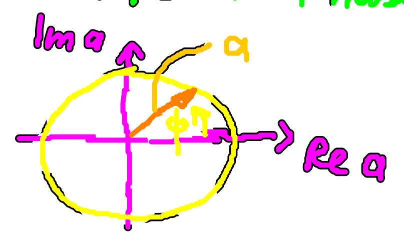
nur Phasendynamik wird betrachtet.
(Amplitude zunächst konstant)

Slave Laser beschrieben als

$$a = |a| e^{-i\phi(t)}$$

← konstante Amplitude

(reiner Phasenoszillator)




verinfachte Feldgleichung mit Injektion

$$\dot{a}(t) = -i\Omega a(t) + E_{inj}/_{\tau}(t)$$

Master Laser mit E-Feld

$$E_{inj} = |E_{inj}| e^{-i\omega_{inj} t}$$

$$\Rightarrow \dot{\phi} = \Omega + \underbrace{\frac{|E_{inj}/\tau|}{|a|}}_{} \sin(\overbrace{\phi - \phi_{inj}}^{\Delta\phi})$$

Injektionsstärke → k

$$\Delta\phi = \phi(t) - \phi_{inj}$$

Output detuning

$$\dot{(\Delta\phi)} = \dot{\phi} - \omega_{inj} = \Delta\omega$$

$$\boxed{\Delta\dot{\phi} = \Delta\omega_{inj} - k\sin\Delta\phi} \quad (*)$$

Input detuning

$\Delta\omega_{inj} = \Omega - \omega_{inj}$

Adler gleichung (1973)

(hergeleitet aus Phasenkopplung beim Schwingkreis)

beschreibt periodisch getriebenen Phasenoszillator!

Suche Lösungen bei denen die Frequenz am Ausgang genau der Frequenz des injezierten signals entspricht,

also $\Delta\phi = \phi_0$ = konstant da dies gerade $\dot{\phi}(t) = \omega_{inj}$ liefert

$\Rightarrow$

$$0 = \Delta\omega_{inj} - k\sin\phi_0$$

2 Lösungen

① $\phi_0 = \arcsin \frac{\Delta\omega_{inj}}{k}$

Stabiler Knoten

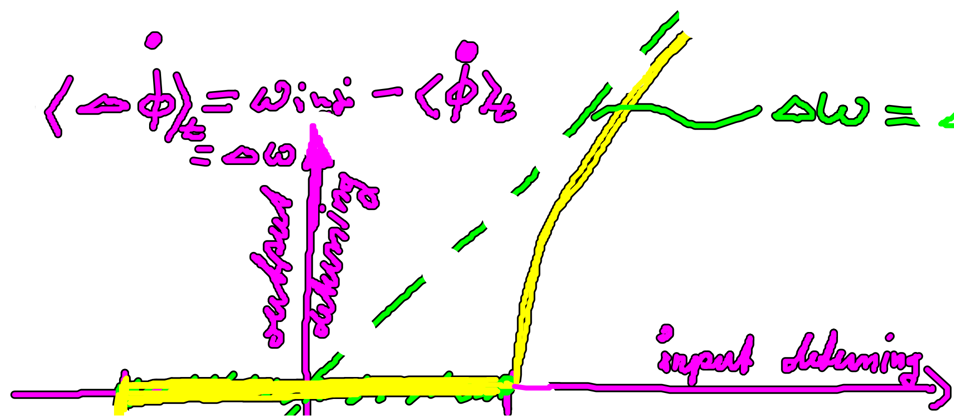
② $\phi_0 = \pi - \arcsin \frac{\Delta\omega_{inj}}{k}$

Instabiler Sattel

$\boxed{\text{Nur existent wenn } \left|\frac{\Delta\omega_{inj}}{k}\right| \leq 1}$

Stabilität: $\Delta\dot{\phi} = f(\Delta\phi)$

$$\left.\frac{\partial f(\Delta\phi)}{\partial \Delta\phi}\right|_{\phi_0} = -k\cos\phi_0 \quad \begin{cases} < 0 & \text{für Lösung ①} \\ > 0 & \text{für Lösung ②} \end{cases}$$



mittlere Frequenz $\langle\dot{\phi}\rangle_t$
außerhalb des Locking Bereiches
folgt aus Integration von (*)

$$T = \int_0^T dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\Delta\phi}\, d\Delta\phi$$

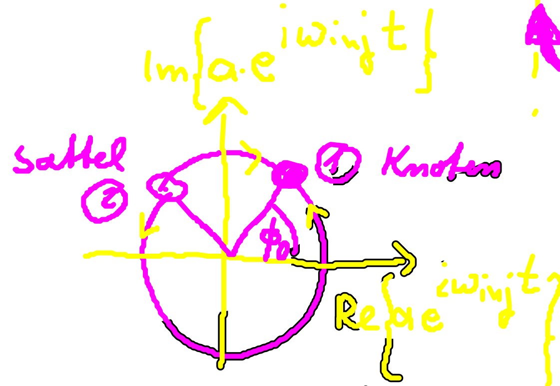
$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\Delta\omega_{inj} - k \sin\Delta\phi}\, d\Delta\phi$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta\omega_{inj} - k^2}}$$

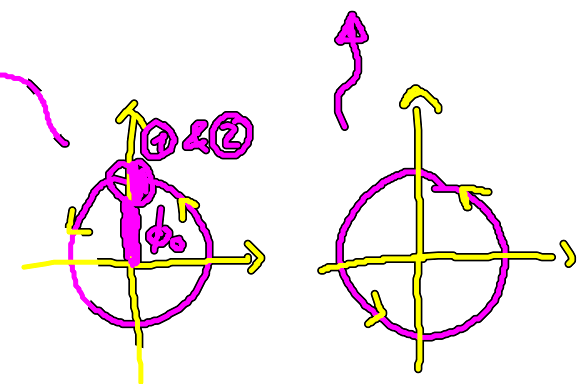

es ex. 2 Lösungen mit $\phi_0 = \text{konst}$

„Locking Bereich"

es gibt nur Lösungen mit laufender Phase „keine Synchronisat




Phasenportrait im mitbewegten Koordinaten




Sattel-Knoten Bifurkation
(Eigenwert wird 0)

<u>Bemerkung</u>: – für große Input detunings gilt

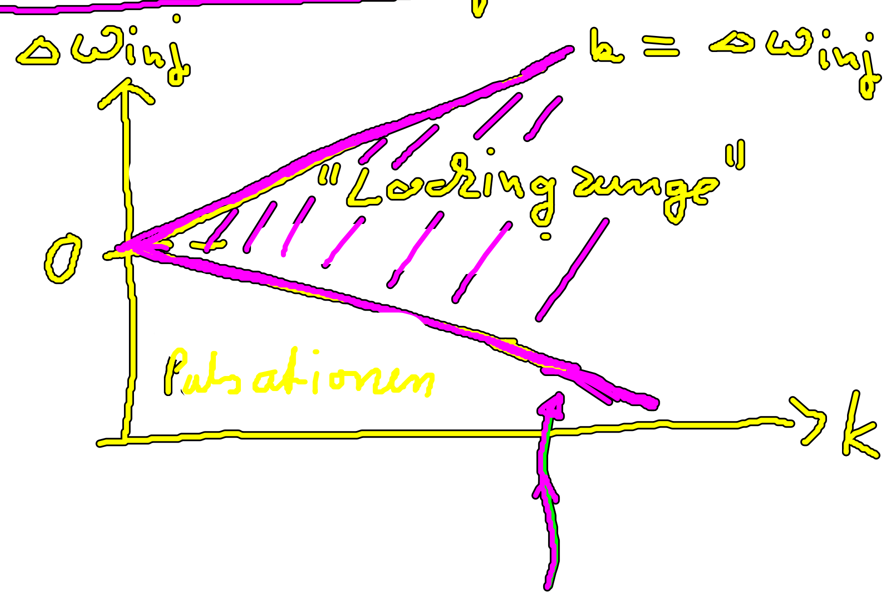
$$\left|\frac{k}{\Delta\omega_{inj}}\right| \ll 1 \quad \longrightarrow \quad \frac{2\pi}{T} = \Delta\omega \approx \Delta\omega_{inj}\left(1 - \frac{k^2}{2\Delta\omega_{inj}^2}\right)$$

d.h. der getriebene Laser emittiert im Mittel mit seiner eigenen Frequenz $\Omega$ allerdings ist die Amplitude moduliert

– am Bifurkationspunkt $(k = |\Delta\omega_{inj}|)$ kommt es zu einer kritischen Verlangsamung der Dynamik da $T \longrightarrow \infty$

Skaling law $\quad T \sim \frac{1}{\sqrt{\Delta\omega_{inj}^2 - k^2}}$

## 2 Parameter Bifurkationsdiagramm




Sattel-Knoten Linie