2.1.4. Dynamik für große Abweichungen vom Fixpunkt (Class B Laser)

Reskalieren der Gleichungen

neue Zeit $s = \omega_R t$

neue Intensitäts-abweichung $I = (P-1)(1+y)$

neue Inversion $\tilde{D} = 1 + \omega_R \cancel{x}$

Lösung der HA:

$$\alpha = (P-1)$$
$$\beta\sigma = 1$$
$$\frac{\sigma\beta}{\alpha}(P-1) = 1$$
$$\sigma^2 = \frac{1}{\gamma_\parallel (P-1)} = \frac{1}{\omega_R^2}$$

$\omega^2 = (2K)^2 \omega_R^2$

Dimension $\frac{1}{s}$

ohne Dim

liefert Dämpfung der Oszillation

$$\Rightarrow \quad \dot{y} = (1+y)X$$

$$\dot{x} = -y \boxed{-\sqrt{\frac{\gamma_\parallel}{P-1}} \cdot x\,(P-(P-1)y)}$$

$$\gamma_\parallel = \frac{1}{2KT}$$

$\underbrace{\qquad}_{}$ klein für $\mu \ll 1$; $P-1$ fest

Fall $\mu \to 0$ (Grenzfall jetzt möglich!)

$\Rightarrow$ ungestörtes Problem ($\mu = 0$)

Leading order Problem:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{y} &= (1+y)\,x \qquad &\text{(I)} \\ \dot{x} &= -y \qquad &\text{(II)} \end{aligned}}$$

Gleichungen sind konservativ!

- Def.: konservativ
  - Ein System $F(\underline{x}) = \dot{\underline{x}}$ ist konservativ wenn es eine Funktion C gibt, so dass $\underline{F}\,\nabla_x C = 0$.

Erhaltungsgröße von (I) und (II)

$$C = \frac{x^2}{2} + y - \ln(1+y)$$

$$\nabla C = \begin{pmatrix} x \\ 1 - \frac{1}{1+y} \end{pmatrix} \qquad \underline{F} = \begin{pmatrix} -y \\ (1+y)x \end{pmatrix}$$

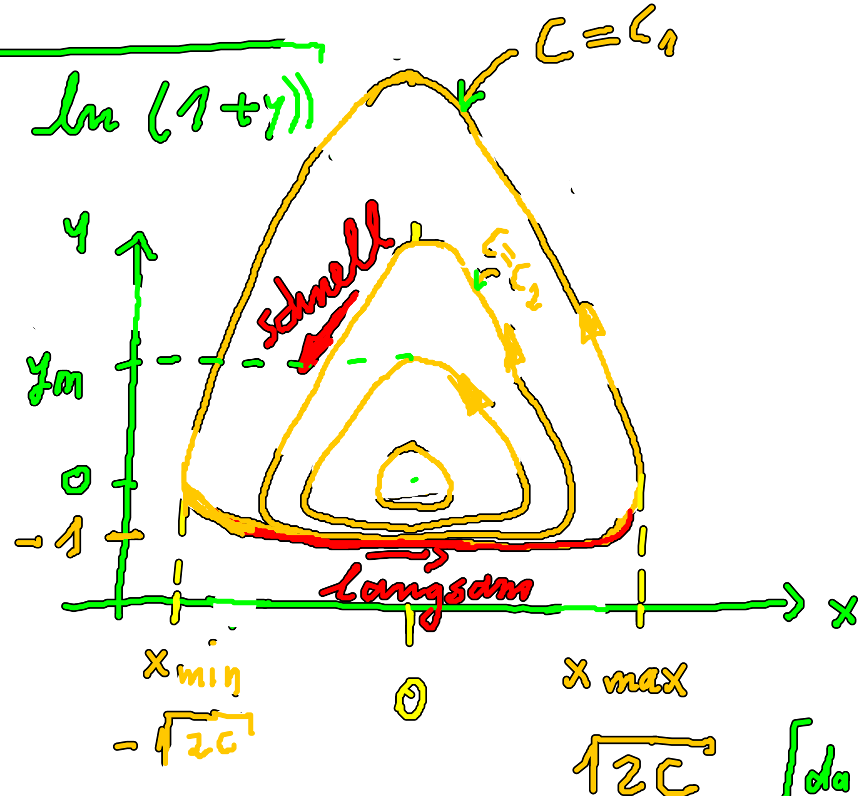
$\Rightarrow \nabla C \cdot \underline{F} \approx 0$

$\Rightarrow$ konservatives System

$\rightarrow$ System ist ungedämpft

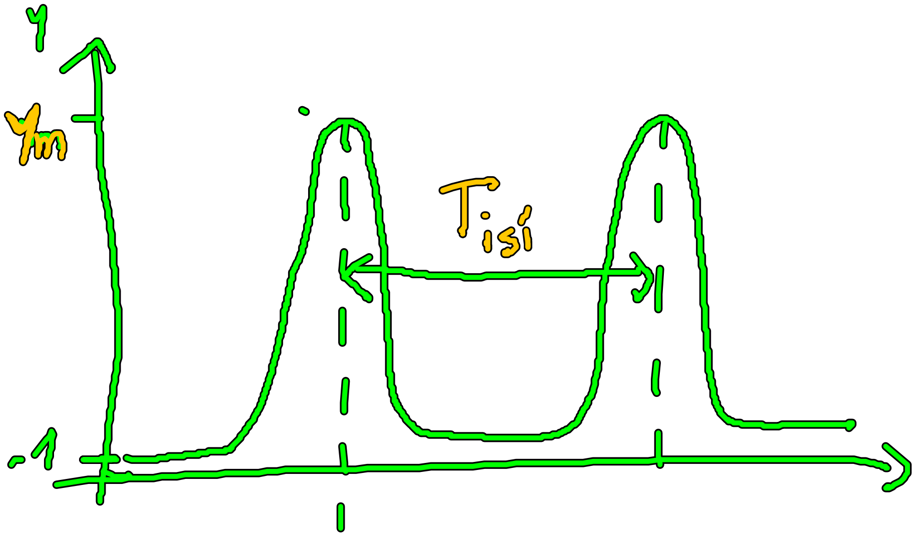
$$x(y) = \pm\sqrt{2\left(C - y + \ln(1+y)\right)}$$

- Form der Trajektorien im Phasenraum bekannt!



[da $\ln(1+y) < y$
und $\ln(1+y) = y$ für $y = 0$]

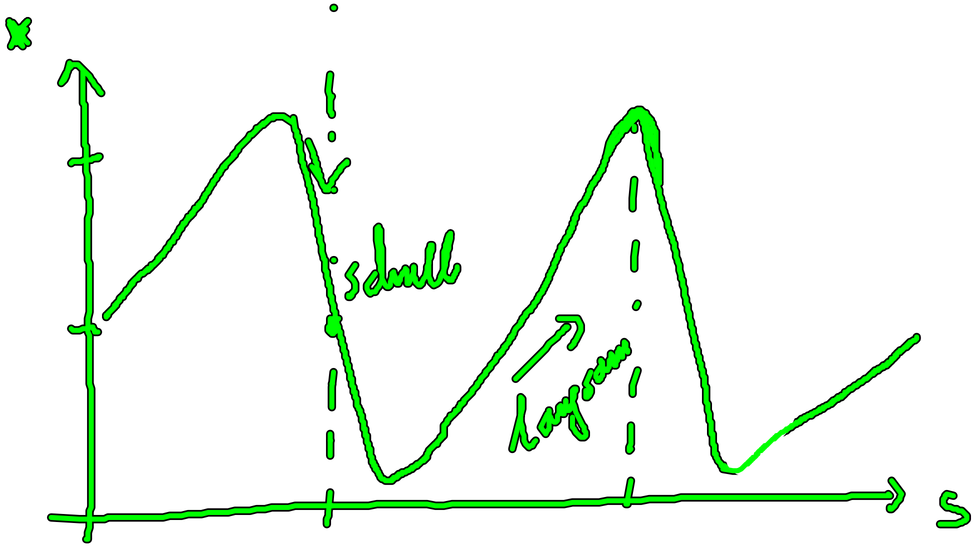
- Zu jedem C gibt es eine Trajektorie im Phasenraum
- C durch Anfangsbed. gegeben
- nichtlineare Schwingungen



Zeitentwicklung
$y(s)$ [numerisch bestimmt]
$x(s)$

$y = -1 \Rightarrow I = 0$

$s = \omega_R t^{neu} = \omega_R 2k t^{alt}$



- Interspike Intervall T_{isi}
  Zeit zwischen den Spikes
  während $I \approx 0$ d.h. $y \approx -1$

DGL: $\dot{y} = (1+y)\,x$

$\dot{x} = -y$

$\rightarrow \dot{x} \approx 1$ wenn $y \approx -1$

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} dx = \int_{t}^{t+T_{isi}} ds$$

$$\boxed{2\sqrt{2C} = T_{isi}}$$

Periode hängt von C also AB ab

- Maximale Intensität von y ist bei $y_m \approx C$ (wenn $x=0$ und C groß), da $C = y - \ln(1+y)$

[$\ln(1+y) \ll y$ für $y > 1$]

$$\Rightarrow \boxed{y_m = \frac{T_{isi}^2}{8}}$$

Periode und Intensität der Spikes sind korreliert!

dieses Skalierungsverhalten ist messbar!

Bem: Analytisch entspricht das ungestörte Problem $(y=0)$ eines Oszillator mit nichtlinearer Dämpfung

$$0 = \ddot{x} + x - \dot{x}x$$

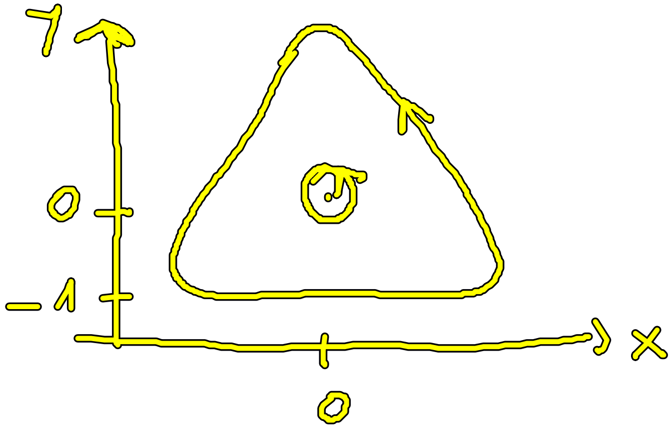
Lösung: mit Potenzreihenansatz mit gestreckter Zeit

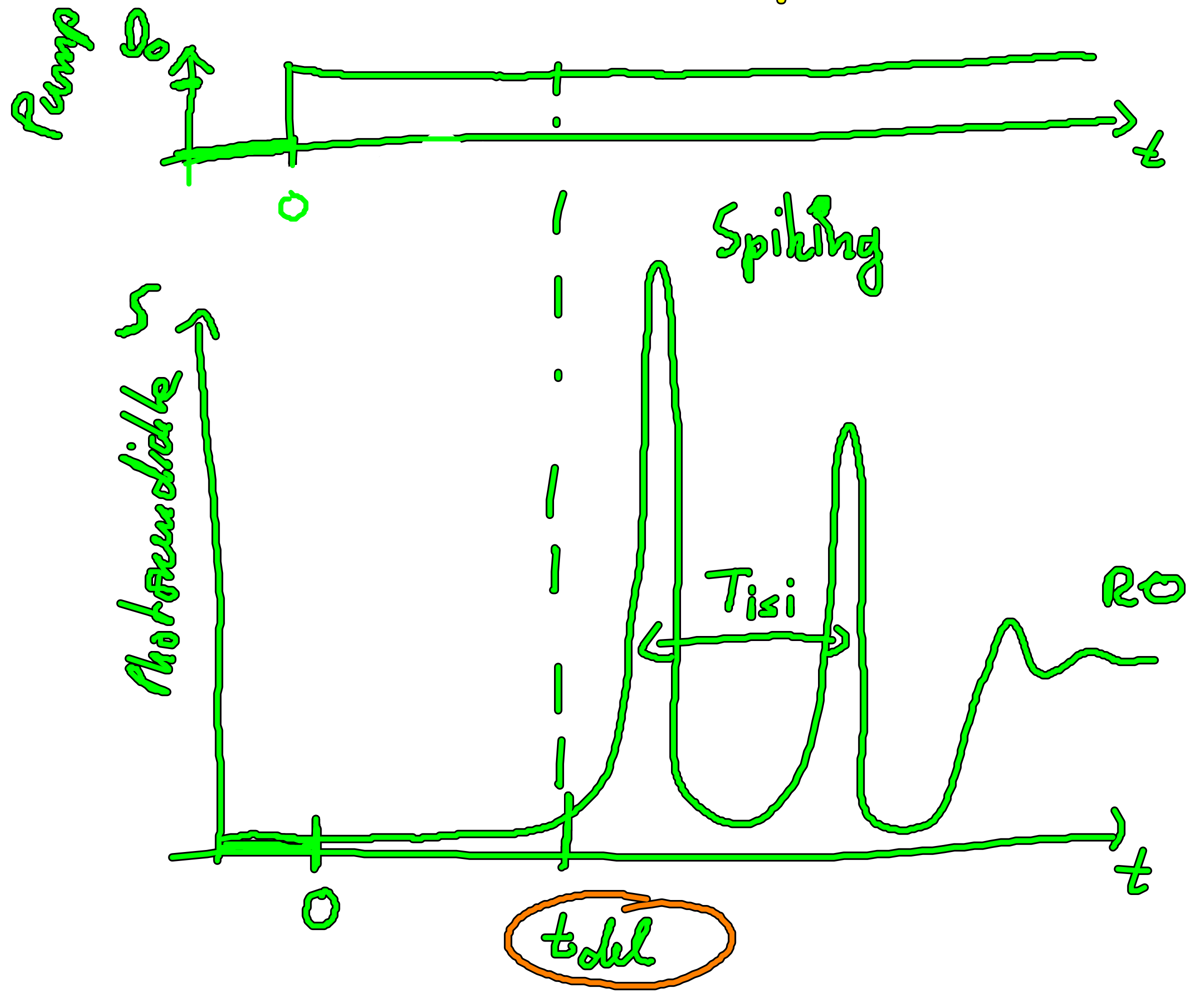
$$\tau = \left(1 - \frac{1}{6}A^2\right) s = \left(1 - \frac{1}{6}A^2\right) \cdot \underbrace{\omega_R \cdot 2\kappa}_{\omega \text{ aus } 2.1.3.} \cdot t$$

$$x(\tau) = iAe^{i\tau} + \frac{1}{3}A^2 e^{2i\tau} + c.c. + O(A^3)$$

$$y(\tau) = Ae^{i\tau} - \frac{2}{3}A^2 e^{2i\tau} + c.c. + O(A^3)$$

A : Amplitude der Abweichung vom Fixpunkt





① für kleine A ist die Schwingung harmonisch
→ Lösung stimmt mit der Lösung der linearen Stabilitätsanalyse überein.

② A groß: $T_{isi} > \frac{2\pi}{\omega_R}$

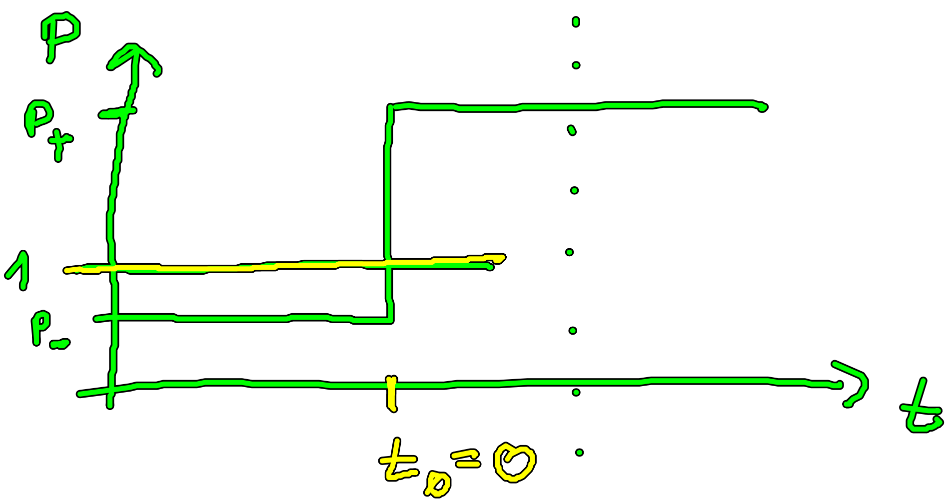
Letzte Frage: Wie lange braucht der Laser um Inversion zu erreichen?

2.1.5. Anschaltverzögerung

Turn-on Relay t_{del}

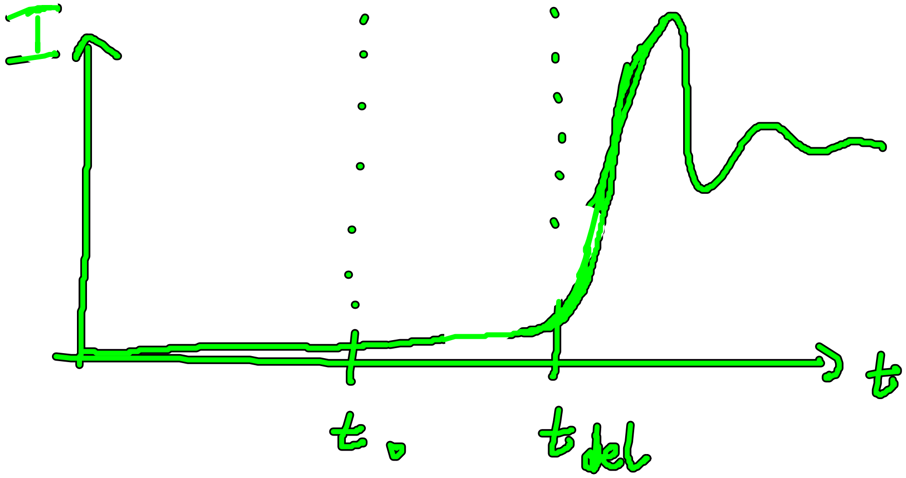
- Frage: Wie groß ist t_{del}?

mit lin. Stabilitätsanalyse nicht zu beantworten da D weit weg vom Fixpunkt bei $t = 0$.



[dimensionslose Gleichungen in $I, \tilde{D}$]

Laser wird bei t_0 eingeschaltet.



(γ kann entweder groß [class A] oder klein [class B] sein)

<u>Ansatz</u>: Intensität I sehr klein

$$\rightarrow \text{(III)} \quad \dot{I} = I(\tilde{D} - 1)$$

$$\text{(IV)} \quad \dot{\tilde{D}} = \gamma(P_+ - D) - \cancel{DI}$$

AB: $I(0) = I_0 \ll 1$

$$\tilde{D}(0) = P_-$$

$t = t^{neu} = 2\kappa t^{alt}$

Lösung von (IV)

$$\tilde{D} = (P_- - P_+)\, e^{-\gamma t} + P_+$$

Einsetzen in III

$$\dot{I} = I\left[(p_- - p_+)\,e^{-\gamma t} + p_+ - 1\right]$$

Problem ist separierbar

Ansatz: $$I = I_0\, e^{\frac{1}{\gamma} F(\gamma t)}$$

$$I = I_0\, e^{\frac{1}{\gamma}\left[(p_+ - 1)\gamma t - \frac{1}{\gamma}(p_- - p_+)\left[e^{-\gamma t} - 1\right]\right]}$$

Fortsetzung folgt