

3. Semiklassischen Lasergleichungen

bisher: - heuristische motivierte Gleichungen
→ nur Herleitung

- keine Phase der Lichtmode
→ Effekte wie Modenkopplung und
Rückkopplung können dann
beschrieben werden

Jetzt: • Maxwell - Gleichungen [Licht klassisch]
• Schrödinger Gleichung für Atome [WW Licht-Materie]

3.1. Wellengleichung für das elektrische Feld

Maxwell gl.:

$$\text{rot } \underline{E} = - \dot{\underline{B}}$$

$$\text{rot } \underline{H} = \underline{j} + \dot{\underline{D}}$$

$$\text{div } \underline{E} = 0$$

$$\text{div } \underline{B} = 0$$

\underline{E} elektr. Feld
 \underline{D} dielekt. Versch.
 \underline{H} Magnetfeld
 \underline{B} magn. Induktion

keine Kopplung an Ladungen
→ das elektr. Feld ist transversal

Materialgleichungen

$$a) \underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$$

↑
Makroskopische Polarisation des Lasermediums
(klass. Oszillatormodell mit $\underline{P} \sim \underline{E}$
kann Lasertätigkeit nicht erklären)

$$b) \underline{B} = \mu_0 \underline{H} \quad \text{nichtmagnetisches Material}$$

c) Stromdichte

$$\underline{j} = \sigma \underline{E}$$

↑
Leitfähigkeit

(Ohmsches Gesetz)

⇒ Herleitung Wellengleichung: [aus $\text{rot}(\text{rot } \underline{E})$]

$$\Delta \underline{E} - \frac{1}{c^2} \ddot{\underline{E}} - \mu_0 \sigma \dot{\underline{E}} = \mu_0 \underline{\dot{P}}$$

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

- für $\underline{P} = 0$ ist dies die Telegraphengleichung für Wellenausbreitung im leitenden Medium
- \underline{P} stellt einen Quellterm für das elektrische Feld

Elektrisches Feld im Resonator

Entwicklung nach Moden λ : $\underline{E}(x,t) = \sum_{\lambda} E_{\lambda}(t) u_{\lambda}(x) \underline{e}_{\lambda}$

Separation
der Variablen
 \implies

die $u_{\lambda}(x)$ sind Lösungen von

$$\Delta u_{\lambda}(x) \underline{e}_{\lambda} + \frac{\omega_{\lambda}^2}{c^2} u_{\lambda}(x) \underline{e}_{\lambda} = 0$$

↑
Polarisation
der Mode

[mit geeigneten RB.]
z.B. period. \rightarrow
 $u_{\lambda}(x) = e^{i k_{\lambda} x}$

es gilt Orthogonalität:

$$\int \underline{u}_{\lambda}(x) \underline{u}_{\lambda'}(x) dx = \delta_{\lambda\lambda'}$$

Modanansatz in Wellengleichung ergibt OGL in der Zeit:

$$\sum_{\lambda} \left(-\omega_{\lambda}^2 E_{\lambda} - \ddot{E}_{\lambda} - \sigma \frac{1}{\epsilon_0} E_{\lambda} \right) u_{\lambda}(x) = \frac{1}{\epsilon_0} \ddot{P}$$

$\int d\underline{x} \underline{u}_{\lambda'}(\underline{x}) \dots \Rightarrow$

$$\omega_{\lambda'}^2 E_{\lambda'} + \ddot{E}_{\lambda'} + \sum_{\lambda} \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_{\lambda'\lambda} \dot{E}_{\lambda} = -\frac{1}{\epsilon_0} \dot{P}_{\lambda'} \quad (\text{I})$$

• $P_{\lambda}(t) = \int \underline{u}_{\lambda}(\underline{x}) \underline{P}(\underline{x}, t) d\underline{x}$

• mit $\sigma_{\lambda'\lambda} = \int \underline{u}_{\lambda'} \sigma \underline{u}_{\lambda} d\underline{x}$
für räumlich homogene
Leitfähigkeit $\sigma_{\lambda'\lambda} = \sigma \delta_{\lambda'\lambda}$

3.2. Materiegleichungen des Lasers

- aktives Medium (hier 2 Niveaus System) beschrieben durch

Schrödingergleichung $i\hbar \dot{\psi}(\underline{r}, t) = H \psi(\underline{r}, t)$



Elektronenwellenfunktion des Atoms

Hamiltonian: $H = H_0 + H_w$

↑ ungestörter Anteil
der Elektronenbewegung im Atom

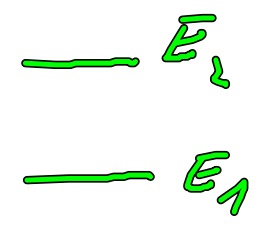
↑ H_w mit Licht

(Annahme:
Eigenwertproblem
von H_0 gelöst)

$H_0 \psi_j = E_j \psi_j \quad (j=1,2)$

↑ Eigenwerte

↑ Eigenzustände



$H_w = e \underline{r} \cdot \underline{E}(t)$

Störoperator

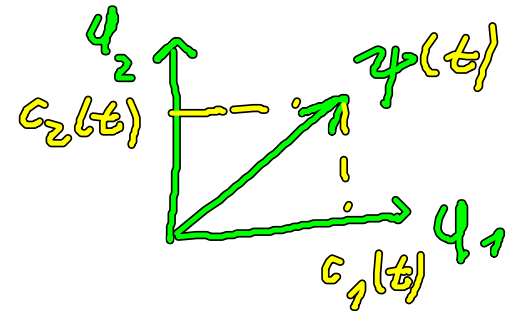
H_w mit elektrischem Feld
in Dipolnäherung

Operator des
elektrischen Dipolmomentes

Entwicklung der Wellenfunktion nach ONS (ψ_1, ψ_2)

$$\psi(\underline{r}, t) = c_1(t) \psi_1(\underline{r}) e^{-i/\hbar E_1 t} + c_2(t) \psi_2(\underline{r}) e^{-i/\hbar E_2 t}$$

=> Einsetzen in Schrödingergleichung



$$i\hbar \left[\dot{c}_1 \psi_1 e^{-i/\hbar E_1 t} + \dot{c}_2 \psi_2 e^{-i/\hbar E_2 t} \right] + \frac{c_1 E_1 \psi_1 e^{-i/\hbar E_1 t} + c_2 E_2 \psi_2 e^{-i/\hbar E_2 t}}{\underline{\hspace{10em}}}$$

$$= \frac{H_0 c_1 \psi_1 e^{-i/\hbar E_1 t} + H_0 c_2 \psi_2 e^{-i/\hbar E_2 t}}{\text{EW Gleichung von } H_0} + c_1 H_W \psi_1 e^{-i/\hbar E_1 t} + c_2 H_W \psi_2 e^{-i/\hbar E_2 t}$$

$$\int d\underline{r} \psi_j^* e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}} E_j \psi_k \dots$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{c}_1 = \frac{1}{i\hbar} c_2 \underline{E}(t) \underline{\mu}_{12} e^{-i\bar{\omega}t} \\ \dot{c}_2 = \frac{1}{i\hbar} c_1 \underline{E}(t) \underline{\mu}_{21} e^{i\bar{\omega}t} \end{cases} \quad (*)$$

mit atomarer Übergangsfrequenz
 $\bar{\omega} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$

$$\text{Def.: } \underline{\mu}_{jk} := \int \psi_j^* e \underline{r} \psi_k d\underline{r}$$

Matrixelement
 des Dipoloperators
 (statisch!)

$$\text{es gilt } \underline{\mu}_{11} = \underline{\mu}_{22} = 0$$

$$\underline{\mu}_{21} = \underline{\mu}_{12}^*$$

Ziel: Berechnung des dynamischen el. Dipolmomentes
 eines Atoms
 (mikroskopische Polarisation)

$$\tilde{p}(t) := \langle e_{\underline{r}} \rangle = \int \psi^* e_{\underline{r}} \psi d\underline{r}$$

$$= c_1^* c_2 \mu_{12} e^{-i\bar{\omega}t} + c_2^* c_1 \mu_{21} e^{i\bar{\omega}t}$$

$$= \tilde{p}_->^{(+)} + \tilde{p}_->^{(-)}$$

$$= -\rho(t) \mu_{12} - \rho^*(t) \mu_{12}^*$$

mit $\rho(t) := c_1^*(t) c_2(t) e^{-i\bar{\omega}t}$

↑
dimensionsloses Dipolmoment

Bewegungsgleichung für $\rho(t)$

$$\dot{\rho} = -i\bar{\omega}\rho + \dot{c}_1^* c_2 e^{-i\bar{\omega}t} + c_1^* \dot{c}_2 e^{-i\bar{\omega}t}$$

$\hat{\rho}_1 \Rightarrow$ Schrödinger-gleichung

$$\begin{aligned}
 &= -i\bar{\omega}\rho + \frac{1}{i\hbar} |c_1|^2 E(t) \mu_{21} e^{i\bar{\omega}t - i\omega t} \\
 &\quad - \frac{1}{i\hbar} |c_2|^2 E(t) \mu_{12}^* e^{i\bar{\omega}t - i\omega t}
 \end{aligned}$$

$$\dot{\rho} = -i\bar{\omega}\rho - \frac{1}{i\hbar} E(t) \mu_{21} [|c_2|^2 - |c_1|^2] \quad (\text{II})$$

Oszillation

↑
WW mit
Licht

Inversion eines Atoms
 $|c_1|^2$ Besetzungswahrsch. für E_1

- Gleichung für $\dot{\rho}$ koppelt an die Inversion $d = |c_2|^2 - |c_1|^2$
- Bewegungsgleichung für d lässt sich analog mit $(*)$ aufstellen

$$\dot{d} = \frac{d}{dt} (|c_2|^2 - |c_1|^2) = \dot{c}_2^* c_2 + c_2^* \dot{c}_2 - c_1^* \dot{c}_1 - \dot{c}_1^* c_1$$

$$\dot{d} = \frac{2}{i\hbar} E(t) (\mu_{12}^* P^* - \mu_{12} P) \quad (\text{III})$$

Gleichung (I) – (III) beschreiben die semiklassische WW von Licht mit einem 2-Niveau System, die zu induzierter Emission führen kann (Dämpfung und Pumpproz. fehlen noch).

