Semiklassische Lasergleichungen

2 Niveau System

$$\left[\begin{array}{l} E_2 \,\text{———} \\ \quad\updownarrow \hbar\bar{\omega} \\ E_1 \,\text{———} \end{array}\right]$$

aus Maxwell & Schrödingergleichung folgte:

$$(\mathrm{II}) \quad \dot{p} = -i\bar{\omega}p - \underbrace{\frac{1}{i\hbar}E(t)\mu_{21}d}_{\text{WW mit Lichtfeld } E(t)} - \gamma p$$

$$\left[\begin{array}{l} p(t) = c_1^* c_2 e^{-i\bar{\omega}t} \\ d(t) = |c_2|^2 - |c_1|^2 \end{array}\right]$$

$\dot{p}$ ↑ "Übergangswahrscheinlichkeit von $E_2 \to E_1$: p ($E_1 \to E_2$: p^*) $\hat{=}$ mikroskop. Polarisation

- Dämpfung von p durch Stöße oder WW mit Phononen ($\to T_2$ Zeit) noch nicht berücksichtigt
  wir verwenden phänomenologischen Ansatz: $\boxed{\dot{p} = -\gamma p}$

$\gamma = \gamma_0 + \frac{1}{T_2}$

$$\dot{d} = \frac{d}{dt}\left(|c_2|^2 - |c_1|^2\right)$$ ← Inversionsdynamik

$$(\mathrm{III}) \quad \dot{d} = \frac{2}{i\hbar}E(t)\left(\mu_{12}^* p^* - \mu_{12} p\right) + \frac{d_0 - d}{T}$$

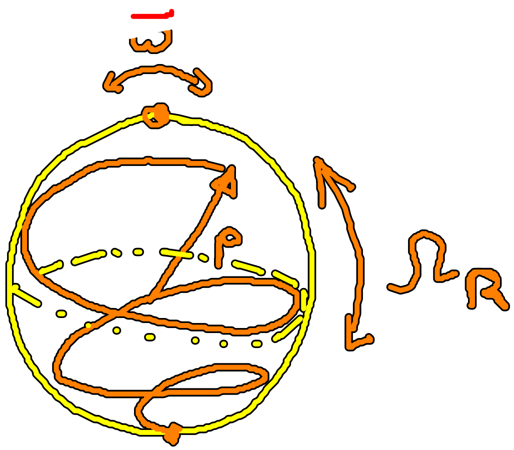
phenomenologischer Term für WW der Atome mit Umgebung
Pumpen + strahlungslose Relaxation

Gl. (II) und (III) sind identisch mit den Bloch'schen Gleichungen für Elektronenspin im Magnetfeld

(E-Feld $\hat{=}$ Magnetfeld
Polarisation $\hat{=}$ Spin)

$\bar{\omega}$ Präzessionsfrequenz

$\Omega = \frac{\bar{E} \mu_{21}}{\hbar}$: Rotationsfrequenz heißt Rabifrequenz



"Umklappen des Spins"

$E(t)$ beschreiben durch Wellengleichung (partielle DGL 2. Ordnung)

$\rightarrow$ Vereinfachungen nötig

3.3. Näherungen der Laser-Grundgleichungen

· Zunächst betrachten wir stehende Wellen im Resonator

$\rightarrow$ Zerlegung der Modenamplituden $E_\lambda(t)$ in positive und negative Frequenzanteile

$$E_\lambda(t) = E_\lambda^{(+)}(t) + E_\lambda^{(-)}(t)$$

$$E_\lambda^{\pm}(t) = \underbrace{\mathcal{E}_\lambda(t)}_{\text{Amplitude}} e^{\overbrace{\mp i\omega_\lambda t}^{\text{Phase}}}$$

3.3.1 Rotating Wave Näherung (RWA)

Term aus Licht-Materie WW

$$\dot{d} = \ldots \underline{E} \left(\mu_{12}^* p^* - \mu_{12} p \right) \ldots$$

enthält Produkt aus $\underline{E}$ und $\underline{P}$

Makroskopische Polarisation

$$\underline{P}(x,t) = \sum_n \delta(\underline{x} - \underline{x}_n)\, \hat{\underline{p}}_n$$

$$= \sum_n \delta(\underline{x} - \underline{x}_n) \left[p_n \underline{\mu}_{12} + p_n^* \underline{\mu}_{21} \right]$$

alle Atome im Resonator

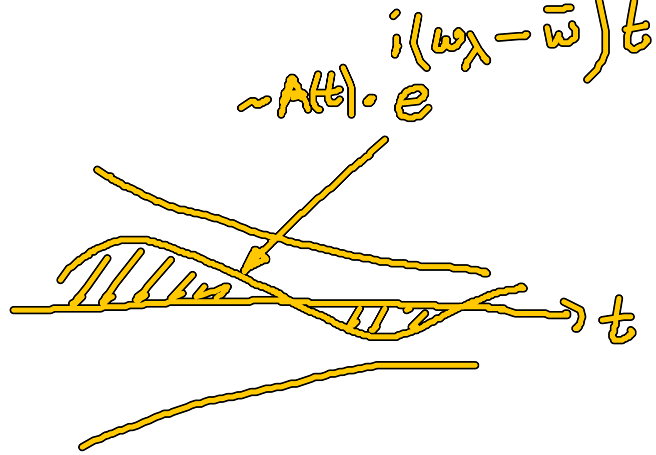
$$= \underbrace{\underline{P}^{(+)}(x,t)}_{\sim e^{-i\bar{\omega}t}} + \underbrace{\underline{P}^{(-)}(x,t)}_{\sim e^{i\bar{\omega}t}}$$

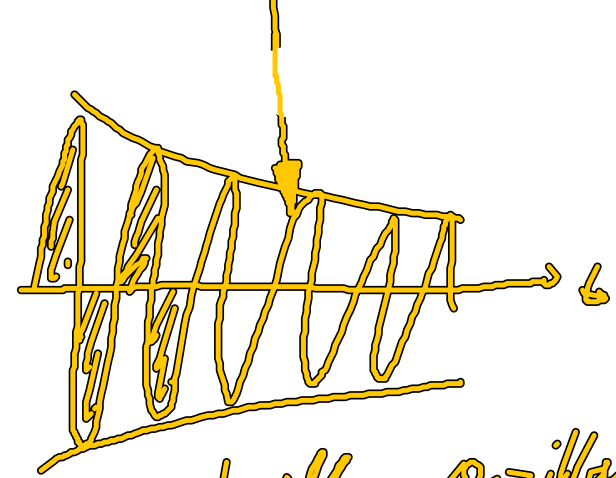
$$\underline{E}\left(\underline{P}^{(-)} - \underline{P}^{(+)} \right)$$

$$= \sum_\lambda \underline{u}_\lambda(\underline{x}) \left(E_\lambda^{(+)} + E_\lambda^{(-)} \right) \left(\underline{P}^{(-)} - \underline{P}^{(+)} \right)$$

($u_\lambda(x)$ sind Lösungen der Helmholzgleichung)

$$= \sum_\lambda \underline{u}_\lambda(x) \Big[\underbrace{E_\lambda^+ \underline{P}^-}_{\sim e^{-i(\omega_\lambda - \bar{\omega})t}} - \underbrace{E_\lambda^- \underline{P}^+} + \underbrace{\cancel{E_\lambda^- \underline{P}^-} - \cancel{E_\lambda^+ \underline{P}^+}}_{\sim \tilde{A}(t)\, e^{\mp i(\omega_\lambda + \bar{\omega})t}} \Big]$$





langsame Oszillation

wenn $\omega_\lambda \approx \bar{\omega}$

d.h. Lasermodenfrequenz nahe der Übergangsfrequenz des Atoms

schnelle Oszillation!

$\Rightarrow$ positive und negative Beiträge kompensieren sich

$\rightarrow$ Beitrag wird vernachlässigt

$\Rightarrow$ Gl. (III) wird in RWA zu

$$\boxed{\dot{D} = \frac{D_0 - D}{T} - \frac{2}{i\hbar}\sum_\lambda \left(\underline{u}_\lambda E_\lambda^+ \underline{p}^- - \underline{u}_\lambda E_\lambda^- \underline{p}^+\right)} \quad (III)^{RWA}$$

$$D = \sum_n \delta(\underline{x} - \underline{x}_n)\, d_0$$

Polarisationsgleichung:

makroskopische Inversion

RWA kann Gl. (II) vereinfachen:

(multipliziere mit $\underline{p}^{(-)}$)

$$\underline{p}^{(-)} \cdot \dot{\underline{p}}^{(+)} = (-i\bar{\omega} - \gamma)\, \underline{p}^{(-)} \cdot \underline{p}^{(+)} + \frac{\underline{p}^{(-)}}{i\hbar} \cdot \sum_\lambda (E_\lambda^{(+)} + E_\lambda^{(-)}) (\underline{u}_\lambda(x) \cdot \underline{\mu}_{21}) \underline{\mu}_{12} D$$

wird vernachlässigt $\sim e^{i(\omega_\lambda + \bar{\omega})}$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\underline{p}}^{(+)}(t) = (-i\bar{\omega} - \gamma)\, \underline{p}^{(+)} + \frac{1}{i\hbar} \sum_\lambda E_\lambda^{+} (\underline{u}_\lambda \cdot \underline{\mu}_{21}) \underline{\mu}_{12} D} \quad (\mathrm{II})^{RWA}$$

RWA in Wellengleichung liefert:

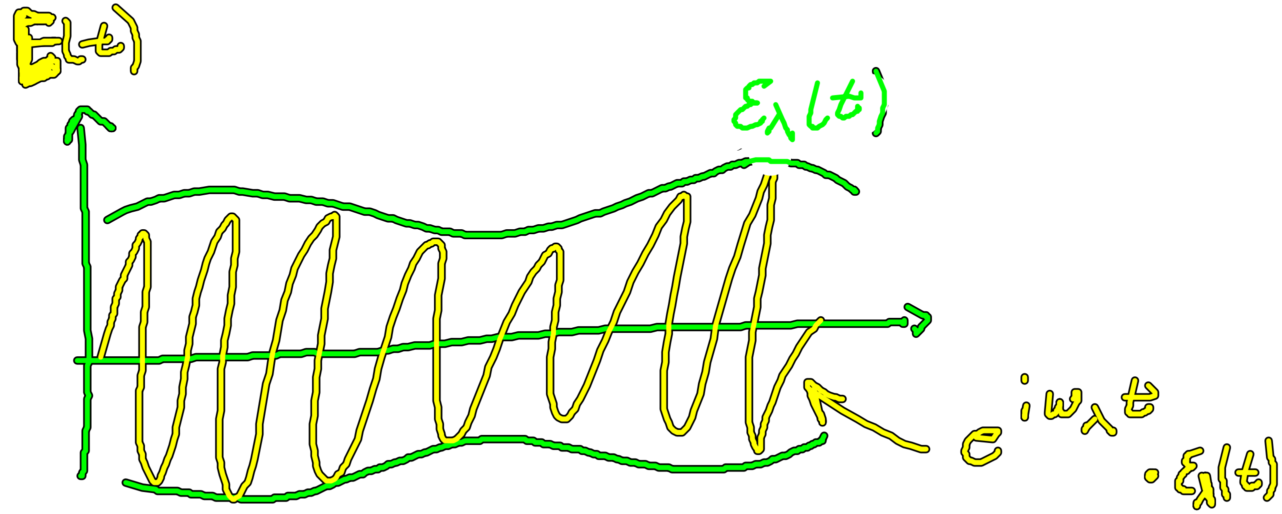
$$\boxed{\omega_\lambda^2 E_\lambda^{\pm} + \ddot{E}_\lambda^{\pm} + \sum_{\lambda'} \frac{\sigma_{\lambda\lambda'}}{\varepsilon_0} E_\lambda^{\pm} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \ddot{P}_\lambda^{\pm}} \qquad (I)^{RWA}$$

Anteile $\ddot{P}_\lambda^{\mp}$ werden vernachlässigt

$$\left(P_\lambda(t) = \int \underline{u}_\lambda \underline{P} \, d\underline{x} \right)$$

3.3.2. Slowly varying envelope approximation (SVEA)

(SVA)



Amplitude $\mathcal{E}_\lambda(t)$ langsam veränderlich gegenüber schnellen Oszillationen mit ω_λ

SVA: $$\boxed{\;|\dot{\mathcal{E}}_\lambda| \ll |\omega_\lambda \mathcal{E}_\lambda|\;}$$

$$\frac{d}{dt}E_\lambda^{\pm}(t) = \frac{d}{dt}\left(\mathcal{E}_\lambda(t)\,e^{\mp i\omega_\lambda t}\right)$$

$$= \left(\dot{\mathcal{E}}_\lambda \mp i\omega_\lambda \mathcal{E}_\lambda\right)e^{\mp i\omega_\lambda t} \approx \mp i\omega_\lambda E_\lambda^{\pm}$$

$$\ddot{E}_\lambda^{\pm}(t) = \left(\ddot{\mathcal{E}}_\lambda \mp 2i\omega_\lambda \dot{\mathcal{E}}_\lambda - \underbrace{\omega_\lambda^2 \mathcal{E}_\lambda}\right)e^{\mp i\omega_\lambda t}$$

SVA:

$$|\dot{\mathcal{E}}_\lambda| \ll |\omega_\lambda \mathcal{E}_\lambda|$$

$$\Rightarrow |\ddot{\mathcal{E}}_\lambda| \ll |\omega_\lambda \dot{\mathcal{E}}_\lambda|$$

$$\Rightarrow \ddot{E}_\lambda^{\pm}(t) \approx (\mp 2i\omega_\lambda \dot{\mathcal{E}}_\lambda - \omega_\lambda^2 \mathcal{E}_\lambda)\, e^{\mp i\omega_\lambda t}$$

Term wird von $\omega_\lambda^2 E_\lambda^{\pm}$ in Wellengleichung kompensiert

$\rightarrow$ Entwicklung noch weiter nötig

Analog

$$\Rightarrow \ddot{\underline{P}}^{\pm} \approx -\bar{\omega}^2 P_\lambda^{\pm}$$

(hier muss die Entwicklung nicht weiter getrieben werden)

Einsetzen in Wellengleichung $(I)^{RWA}$

$$\Rightarrow \mp 2i\omega_\lambda \left[\dot{E}_\lambda^{\pm} \pm i\omega_\lambda E_\lambda^{\pm}\right] \mp i\omega_\lambda \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma_\lambda E_\lambda^{\pm} = \frac{1}{\varepsilon_0}\bar{\omega}^2 P_\lambda^{\pm}$$

$$\boxed{\dot{E}_\lambda^{\pm} = \left(\mp i\omega_\lambda - \kappa_\lambda\right) E_\lambda^{\pm} \pm \frac{1}{2\varepsilon_0}\,\overline{\omega}\,P_\lambda^{\pm}} \qquad (\mathrm{I})^{SVA}_{RWA}$$

reduzierte Wellengleichung
für stehende Wellen
im SVA & RWA Näherung

$\kappa_\lambda := \frac{\sigma_\lambda}{2\varepsilon_0}$ optische Verlustrate für $\sigma_{\lambda\lambda'} = \sigma_\lambda \delta_{\lambda\lambda'}$

3.3.3. SVA für zeitlich und räumlich veränderliche Felder

Rechnung analog wie oben mit Ansatz:

$$\underline{E}(\underline{x},t) = \underline{E}^+(\underline{x},t) + \underline{E}^-(\underline{x},t)$$

$$\underline{E}^{\pm}(\underline{x},t) = \underbrace{\underline{\mathcal{E}}^{\pm}(\underline{x},t)}_{\text{Amplitude}}\, \underbrace{e^{\pm i(\underline{k}\underline{x} - \omega t)}}_{\text{ebene Welle}}$$

$$\underline{P}^{\pm}(\underline{x},t) = \underline{P}_A^{\pm}(\underline{x},t)\, e^{\pm i(\underline{k}\underline{x} - \omega t)}$$

SVA: $|\ddot{\mathcal{E}}^+| \ll |\omega \dot{\mathcal{E}}^+|$

$|\Delta \mathcal{E}^+| \ll |(\underline{k}\underline{\nabla})\mathcal{E}^+|$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\mathcal{E}}^{\pm} + c(\underline{e}_k \nabla)\mathcal{E}^{\pm} = -\kappa \mathcal{E}^{\pm} \pm i \frac{\omega}{\varepsilon_0} \underline{P}_A^{\pm}}$$

reduzierte Wellengleichung

mit Ausbreitung

3.3.4 Dimensionslose Gleichungen für stehende Wellen im Resonator

Gleichungen (I)–(III) $^{SVA}_{RWA}$ ergeben Grundgleichungen der semiklassischen Laser-theorie dimensionslos formuliert:

$$\text{(I)'}\quad \dot{a}_\lambda = (\underbrace{-i\omega_\lambda}_{\text{Osz.}} \underbrace{- \kappa_\lambda}_{\text{Dämpfung}})\, a_\lambda - i \sum_n g_{\lambda n}\, \underbrace{p_n}_{\text{Antrieb durch Polarisation}}$$

$$\text{(II)'}\quad \dot{p}_n = (\underbrace{-i\bar{\omega}_n}_{\text{Osz.}} \underbrace{- \gamma_\perp}_{\text{Dämpfung}})\, p_n + i \sum_\lambda g_{\lambda n}\, \underbrace{a_\lambda}_{\text{Kopplung an Licht über}}\, \underbrace{d_n}_{\text{Inversion}}$$

$$\text{(III)'}\quad \dot{d}_n = \underbrace{\frac{d_0 - d_n}{T}}_{\text{Pumpen + Relaxation}} + 2i \sum_{\lambda} \left(g^*_{\lambda n}\, \underbrace{p_n}_{\text{Kopplung Licht-Materie über } p}\, a^*_{\lambda} - g_{\lambda n}\, a_{\lambda}\, p_n^* \right)$$

Neue Feldgröße $a_\lambda(t)$ definiert durch:

$$E^{(+)}_{\lambda}(t) = i \sqrt{\frac{\hbar \omega_\lambda}{2 \varepsilon_0}}\, a_\lambda(t)$$

$$E^{(-)}_{\lambda}(t) = -i \sqrt{\frac{\hbar \omega_\lambda}{2 \varepsilon_0}}\, a^*_\lambda(t)$$

(motiviert durch
Übergang zur voll QM Beschreibung
$a_\lambda \hat{=}$ Vernichtungsoperator eines
Photons der Mode λ)

Kopplungskonstante

$$g_{\lambda n} := i\, \underline{\mu}_{21n}\, \underbrace{\underline{e}_\lambda\, u_\lambda(x)}_{\text{Polarisation und Ortsabhängigkeit der Mode } \lambda} \sqrt{\frac{\omega_\lambda}{\hbar\, 2 \varepsilon_0}}$$

statisches optisches

Dipolmoment

$$\underline{\mu}_{21\,n} = \langle \varphi_2^{n} | \, e \, \underline{r} \, | \varphi_1^{n} \rangle$$

Atom
Eigenzustand