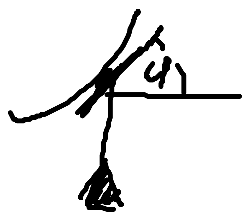
2. Kontrollkonzepte

2.1 Offene und geschlossene Steuerung

Bsp.: Steuerung Parabolantenne, die auf einen Satelliten gerichtet ist.



Bewegungsgl. $\dot{\varphi} = \omega$

$$J\dot{\omega} = -r\omega + ku$$

φ Drehwinkel
ω Winkelgeschwindigkeit

Parameter: Trägheitsmoment J
Reibungskoeffizienten r
Verstärkungsfaktor k

Spannung u ⟶ $\boxed{\text{Verstärker}}$ ⟶ $\boxed{\text{Motor}}$ ⟶ Drehwinkel φ

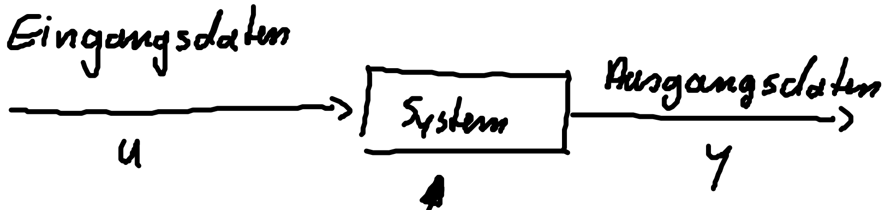
Ziel: Drehwinkel φ_1 zur Zeit t_1 durch Spannung u

$\Rightarrow$ Finde $u(t)$, so dass eine Lösung des System $\varphi(t_1) = \varphi_1$ bei Anfangsbedingung $\varphi(t_0) = \varphi_0$ existiert.

⇒ Kriterien: – zeitoptimale Lösung
– Energieoptimale Lösung

- Theoretische / Mathematische Grundlagen

Schema:



interne Dynamik häufig unbekannt

Bsp.: Autofahren: Eingänge
– Gasgaben
– Bremsen
– Lenken

Ausgänge
– Tacho
– Drehzahlmesser

interne Dynamik (Motor getriebe) unbekannt

Modell:
$$\dot{x} = f(\underline{x}, \underline{u}) \quad \text{mit} \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$$
$$\underline{y} = g(\underline{x}, \underline{u})$$

$\underline{u}$: Steuerfunktion

$\underline{x}$: Systemzustand

$\underline{y}$: messbare Ausgangsgrößen

$\underline{f}$: funktionaler Zusammenhang des Systems
$\underline{g}$: " " der Messung
evtl. schwierig zu ermitteln
interdisziplinäre Zusammenarbeit

<u>Definition</u>: Ein <u>lineares Steuerproblem</u> hat die Form

$$\underline{\dot{x}}(t) = \underline{\underline{A}}(t)\,\underline{x}(t) + \underline{\underline{B}}(t)\,\underline{u}(t) \quad , \quad t \in [t_0, \infty)$$

$$\underline{x}(t_0) = x_0$$

$$\underline{y}(t) = \underline{\underline{C}}(t)\,\underline{x}(t) + \underline{\underline{D}}(t)\,\underline{u}(t) \quad \text{(Ausgangsgleichung)}$$

Dabei sind:

$\underline{x}(t) \in \underline{\bar{X}}$ (Zustandsraum) : $[t_0 \to \infty) \to \mathbb{R}^n$

$\underline{y}(t) \in \underline{\bar{Y}}$ (Ausgangsraum) : $[t_0 \to \infty) \to \mathbb{R}^p$

$\underline{u}(t) \in \underline{\bar{U}}$ (Eingangsraum) : $[t_0 \to \infty) \to \mathbb{R}^m$

$\underline{\bar{X}}, \underline{\bar{Y}}, \underline{\bar{U}}$ sind Mengen von Funktionen, die auf $[t_0, \infty)$ definiert sind.

→ für die Matrizen gilt

$$\underline{\underline{A}}(t) : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^{n,n}$$
$$\underline{\underline{B}}(t) : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^{n,m}$$
$$\underline{\underline{C}}(t) : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^{p,n}$$
$$\underline{\underline{D}}(t) : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^{p,m}$$

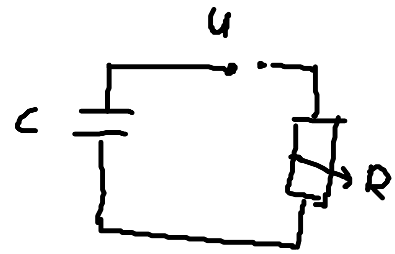
NB: analoges Vorgehen für zeitdiskrete Systeme

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{\underline{A}}_k\,\underline{x}_k + \underline{\underline{B}}_k\,\underline{u}_k$$

Frage: Zusammenhang Ausgang $\underline{y}$ und Eingang $\underline{u}$?

→ Transferfunktion

$\boxed{\text{Bsp.}}$: elektrischer Schaltkreis



Zustand: $\underline{x}(t) = q(t)$ Ladung am Kond.

Eingang: $\underline{u}(t) = U(t)$ Spannung

Ausgang: $\underline{y}(t) = q(t)$

R Widerstand
C Kapazität

Zustandsgleichung: Kirchhoffsche Regel

$$\text{(I)} \quad \dot{q}(t) = -\frac{1}{RC}\, q(t) + \frac{1}{R}\, u(t)$$

Vergleich mit Definition liefert: $\underline{\underline{A}} = -\frac{1}{RC}$, $\underline{\underline{B}} = \frac{1}{R}$, $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{1}}$, $\underline{\underline{D}} = 0$

Lösung der Zustandsgleichung

$$\overset{(I)}{\Rightarrow} \quad q(t) = \exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Anfangsbed.}}}{q(t_0)} + \frac{1}{R} \int_{t_0}^{t} \exp\left(-\frac{t-s}{RC}\right) u(s)\, ds$$

hier: Lösung der Zustandsgleichung $\hat{=}$ Ausgangsfunktion

<u>Stabilität</u>: i) asymptotisch stabil : Realteile der Eigenwerte von $\underline{\underline{A}}$ negativ

ii) (schwach) stabil: " " nicht positiv

<u>Bsp.</u>: ① Schaltkreis Eigenwert von $\underline{\underline{A}}$: $-\frac{1}{RC} < 0$

$\rightarrow$ asymptotisch stabil

② Parabolantenne:

$$\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{r}{J} \end{pmatrix}}_{= \underline{\underline{A}}} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K}{J} \end{pmatrix} \underline{u}$$

Eigenwerte von $\underline{\underline{A}}$: $(-\lambda)\left(-\frac{r}{J} - \lambda\right) \stackrel{!}{=} 0$

$\rightarrow \lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = -\frac{r}{J} < 0$

$\rightarrow$ (schwach) stabil

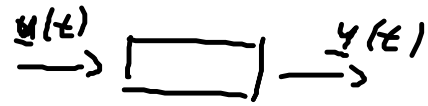
Definition: Gegeben sei das System $\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{\underline{B}}\,\underline{u}$ mit $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ und ein Endzustand $\underline{x}_1$. Das Paar $(t_0, \underline{x}_0)$ heißt zur Zeit $t_1 > t_0$ nach $\underline{x}_1 = \underline{x}(t_1)$ steuerbar, wenn es eine Steuerfunktion $\underline{u} \in \bar{U}$ gibt, so dass die Lösungen $\underline{x}(t)$ des Systems mit dieser Steuerung $\underline{x}_1 = \underline{x}(t_1)$ erfüllt.

Das Paar (t_0, x_0) heißt nach $\underline{x}_1$ steuerbar, wenn es zu irgendeiner Zeit t_1 $(t_0 < t_1 < \infty)$ nach $\underline{x}_1$ steuerbar ist.

Wenn für jedes (t_0, x_0) und jedes $\underline{x}_1$ das Paar (t_0, x_0) nach $\underline{x}_1$ steuerbar, so heißt das System <u>vollständig steuerbar</u>.

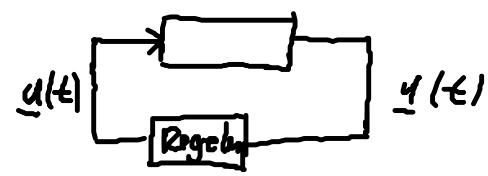
Steuerung vs. Regelung:

- Offener Kreis (Steuerung)



$$\underline{u}(t) = \underline{h}(t, x_0)$$

- geschlossener Kreis (Regelung)



etwa: $\underline{u}(t) = -\underline{\underline{F}}(t)\,\underline{y}(t)$

oder: $\underline{u}(t) = \underline{h}(\underline{x}(t))$

Satz: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Das zeitinvariante System: $\underset{\in \mathbb{R}^n}{\dot{\underline{x}}(t)} = \underset{\in \mathbb{R}^{n,n}}{\underline{\underline{A}}}\, x(t) + \underset{\mathbb{R}^{n,m}}{\underline{\underline{B}}}\, \underset{\in \mathbb{R}^m}{u(t)}$ ist vollständig steuerbar.

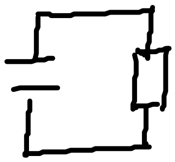
(ii) Die Steuerbarkeitsmatrix

$$\underline{\underline{K}} := \left(\underline{\underline{B}}, \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}, \underline{\underline{A}}^2 \underline{\underline{B}}, \dots \underline{\underline{A}}^{n-1} \underline{\underline{B}} \right)$$ hat Rang n.

(iii) Ist $\underline{p} \neq 0$ ein Eigenvektor zu $\underline{\underline{A}}^T$, so gilt $\underline{p}^T \underline{\underline{B}} \neq 0$

(iv) Rang $(\lambda \underline{\mathbb{1}} - \underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{B}}) = n \qquad \forall \lambda$

Bsp.

① 

$\underline{\underline{A}} = -\frac{1}{RC}, \qquad \underline{\underline{B}} = \frac{1}{R} \qquad n = 1$

$$\Rightarrow \underline{\underline{K}} = (\underline{\underline{B}}, \ldots, \underline{\underline{A}}^0 \underline{\underline{B}}) = \underline{\underline{B}} = \frac{1}{R} \neq 0$$

rang $\underline{\underline{K}} = 1 = n$ $\quad \rightarrow$ Das System ist steuerbar.

② Parabolantenne: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{r}{J} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K}{J} \end{pmatrix} \qquad n = 2$

$$\Rightarrow \underline{\underline{K}} = (\underline{\underline{B}}, \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{K}{J} \\ \frac{K}{J} & -\frac{rK}{J^2} \end{pmatrix}$$

rang $\underline{\underline{K}} = 2$ $\quad \rightarrow$ Das System ist steuerbar.

weitere mögliche Definitionen: - stabilisierbar (Steuerung in Gleichgewichtslage)

- rekonstruierbar (Vergangenheit wiederherstellen)
- beobachtbar ($\underline{y} = \underline{\underline{C}}\,\underline{x}$)
- entdeckbar (Zukunft vorhersagen)

Beweis für Satz: (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\quad \nwarrow p^T \underline{\underline{B}} \neq 0$

$\uparrow$

Steuerbarkeitsmatrix hat Rang n

$$\underline{\underline{K}} := (\underline{\underline{B}}, \underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}, \dots \underline{\underline{A}}^{n-1}\underline{\underline{B}})$$

ii -> iii

Annahme: $\underline{p} \neq 0$ Eigenvektor zu $\underline{\underline{A}}^T$ und $\underline{p}^T \underline{\underline{B}} = 0$

Dann: $\underline{p}^T \underline{\underline{K}} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Rang } \underline{\underline{K}} \neq n . \quad \lightning$

iii -> ii Annahme: Rang $\underline{\underline{K}} \neq n \qquad \underline{p}^T \underline{\underline{K}} = 0$ für $\underline{p} \neq 0$

dann: $p^T \underline{\underline{A}}^i \underline{\underline{B}} = 0$ und somit für $\underline{p}$ Eigenvektor von $\underline{\underline{A}}$

$$p^T \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \lambda \underline{p}^T \underline{\underline{B}} = 0 \quad \lightning$$

Nachtrag zur Stabilisierbarkeit von dyn. Systemen (2.1.)

Literatur:

1. "Regelungstechnik 2 Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung" Jan Lunze Springer Lehrbuch 2008
2. Skript V. Mehrmann www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS11/Kontrolltheorie

System

Ausgangspunkt: $\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$ ← Eingang

$y(t) = C\,x(t) + D\,u(t)$

Ausgang

- Steuerbar $\Longleftrightarrow$ beliebige Werte x können durch u erzeugt werden

Lösung der DGL

$$x_e = e^{At_e} x_0 + \int_0^{t_e} e^{A(t_e-\tau)} B\,u(\tau)\,d\tau$$

$\begin{pmatrix} x_e = x(t_e) \text{ Endpunkt} \\ x_0 = x(t_0) \text{ Start} \end{pmatrix}$

sei $x_e = 0$

$$e^{-A\tau} = 1 - A\tau + A^2 \frac{\tau^2}{2!} + \dots$$

$$-\underline{e^{At_e}}\, x_0 = \underline{e^{At_e}} \int_0^{t_e} e^{-A\tau}\, \underline{\underline{B}}\, u(\tau)\, d\tau$$

$$-x_0 = \int_0^{t_e} \underline{\underline{B}}\, u(\tau)\, d\tau - \int_0^{t_e} \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\, \tau\, u(\tau)\, d\tau + \int_0^{t_e} \underline{\underline{A}}^2 \underline{\underline{B}}\, \frac{\tau^2}{2!}\, d\tau - \dots$$

$$\longleftarrow \qquad u_i = (-1)^i \int_0^{t_e} \frac{\tau^i}{i!}\, u(\tau)\, d\tau$$

$$-x_0 = \underbrace{\underline{\underline{B}}}_{\underline{v}_1} u_0 + \underbrace{\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}}_{\underline{v}_2} u_1 + \underbrace{\underline{\underline{A}}^2 \underline{\underline{B}}}_{\underline{v}_3} u_2 + \dots$$

Ein beliebiger Vektor x_0 kann nur dann erzeugt werden, wenn die Vektoren $\underline{v}_i$ den Phasenraum aufspannen.

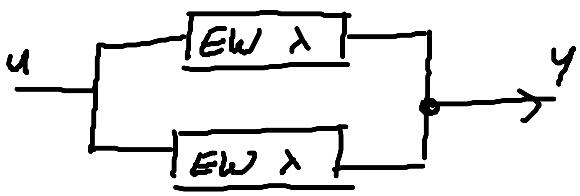
(Bem. A^n und alle höheren Potenzen sind Linearkombination von den niedrigeren Potenzen
Cayley Hamilton)

$$\Rightarrow \text{Rang}\left(\underline{\underline{B}},\ \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}},\ \dots\ \underline{\underline{A}}^{n-1}\underline{\underline{B}}\right) = n$$

Kalman Kriterium

<u>Bem</u>: steuerbar heißt NICHT das das System in dem Zustand bleibt!

<u>Bsp.</u>: Nicht steuerbares System



Parallelschaltung

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

→ nicht steuerbar

Alternative Def. der Steuerbarkeit

- System in Normalform gegeben

steuerbar wenn $\underline{\underline{B}}$ keine Nullzeile besitzt & die Zeilen von $\underline{\underline{B}}$ die zum gleichen EW gehören linear unabhängig sind

$\boxed{\text{Bsp}}$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} x + \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}} u$$

$$\underbrace{\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{A}}^2\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}}_{\text{alle in der } x_2, x_3 \text{ Ebene}} \qquad \text{Rang}(K) = 2 < 3$$