Lasertheorie

1. Einführung

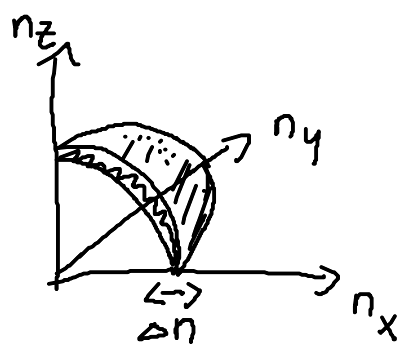
1.1. Plank'sche Strahlungsgesetz

1.1.1. Herleitung von Planck

- Körper im GG mit Strahlungsfeld
- $$u(\nu)d\nu = \underbrace{\frac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu}_{①} \ \underbrace{\frac{h\nu}{e^{\beta h\nu}-1}}_{②}$$

① Zahl der Schwingungsmoden   ② mittlere Energie

① ρ = Zahl der Schwingungsmoden im Hohlraumresonator der Größe L^3 pro Frequenzintervall



- Randbedingungen für Lichtfeld

$$E \sim \sin k_x x \ \sin k_y y \ \sin k_z z$$

$$k_i = \frac{\pi}{2} n_i \qquad n_i \in \mathbb{N}, \ i \in x,y,z$$

Frequenz $$\nu = \frac{c}{2\pi}|k| = \frac{c}{2L} n = \frac{c}{2L}\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

$\Delta Z \mathrel{\hat{=}}$ Zahl der Moden in Kugelschale der Dicke Δn

$$\Delta\nu = \frac{c}{2L}\Delta n$$

Kontinuumsnäherung : $\Delta Z = 4\pi n^2 \Delta n$

Zahl der Punkte im n_x, n_y, n_z Raum

$$\rho = 2 \frac{\Delta Z}{8}$$

Polarisationsrichtungen

pos. Quantenzahlen

$$= \frac{1}{4} 4\pi n^2 \frac{2L}{c} \Delta \nu = \pi \frac{8V}{c^3} \nu^2 \Delta \nu$$

Je größer die Frequenz desto mehr Moden im Intervall $\Delta \nu$.

② mittlere Energie U

- kanonisches Ensemble $\quad p_n = \frac{1}{Z} e^{-\beta H_n}$

$$U = \sum_n p_n \varepsilon_n = \frac{h\nu}{e^{\beta h \nu} - 1}$$

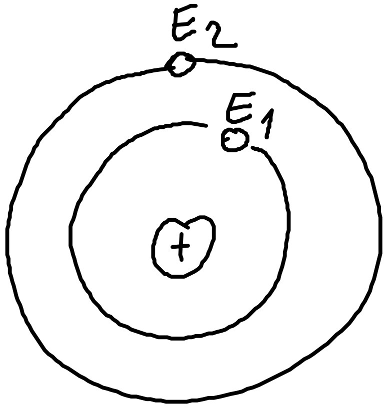
Energie

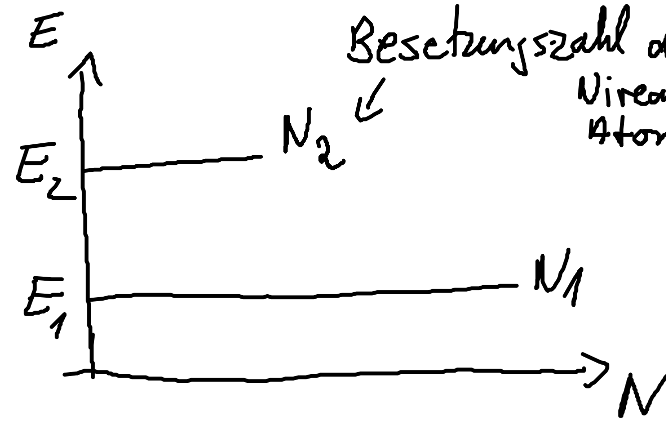
$$\Rightarrow u(\nu)\, d\nu = U \cdot \rho.$$

Planck'sches Strahlungsgesetz

1.1.2 Herleitung von Einstein

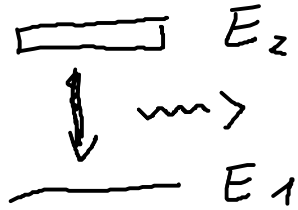
• betrachte Ensemble aus N Atomen



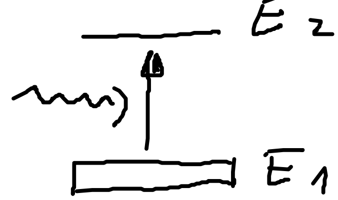


Besetzungszahl des Niveaus E_2 aller N Atome

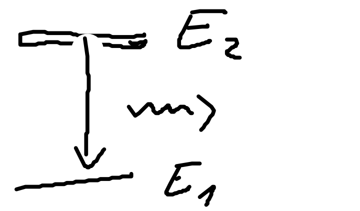
Emission



Absorption



spon. Emission



$$-\frac{dN_2}{dt} = N_2 B_{21} \boxed{\rho}$$

wesentliche Annahme

$$\frac{dN_2}{dt} = N_1 B_{12} \rho$$

Energiedichte des Strahlungsfeldes

$$-\frac{dN_2}{dt} = A N_2$$

Im thermodynamischen GG $\left(\frac{dN_2}{dt} = 0\right)$ ändert sich Besetzungszahl N_2 nicht

$$\Rightarrow \quad N_1 B_{12} \rho = N_2 B_{21} \rho + A N_2$$

$$\rho = \frac{A}{B_{21}} \frac{1}{\frac{N_1 B_{12}}{N_2 B_{21}} - 1}$$

• kanonisches Ensemble (GG)

$$\frac{N_1}{N_2} = e^{-\frac{E_1 - E_2}{kT}} = e^{-\frac{\hbar\nu}{kT}}$$

• Grenzwertüberlegung $T \to \infty$: $\rho \to \infty$

$$\to \frac{N_1}{N_2}\frac{B_{12}}{B_{21}} = e^{-\frac{\hbar\nu}{kT}}\frac{B_{12}}{B_{21}} = 1$$

$$\Rightarrow B_{12} = B_{21} = B$$

Bem.: auch mikroskopisch herzuleiten

(1)

$$\to \rho(\nu) = \underbrace{\frac{A}{B}}_{\text{noch unbekannt}} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\nu}{kT}} - 1}$$

• klassischer Grenzfall $h\nu << kT$ Rayleigh Jeans

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 kT = \frac{P}{\Delta\nu V} kT$$

• Taylor $e^{\frac{\hbar\nu}{kT}} \approx 1 + \frac{\hbar\nu}{kT}$

(1) $\rho(\nu) \approx kT \frac{A}{h\nu B}$

$$\frac{A}{B} = \frac{8\pi}{c^3} h\nu^3 = \frac{P}{\Delta\nu V} kT$$

A, B heißen Einsteinkoeffizienten $\qquad B = \dfrac{AV}{h\nu \frac{p}{\Delta\nu}}$

A: Einheit reziproke Zeit $\Rightarrow A = \dfrac{1}{\tau}$

Lebensdauer eines Zustandes geg. spontaner Emission

1.2. Bilanzgleichungen

Z_G: Zahl der Photonen die durch WW Licht + Atom entstehen (in alle Moden)

$$\frac{dZ_G}{dt} = \underbrace{(N_2 - N_1) B \rho}_{\text{Ind. Emission - Absorption}} + \underbrace{A N_2}_{\text{spon. Emission}}$$

Modenzahl

$$Z_G = p Z$$

$$\underbrace{V \cdot \rho(\nu)}_{\text{Energie}} = \underbrace{\frac{p}{\Delta\nu}}_{\text{Modendichte}} Z h\nu$$

$$\Rightarrow p \frac{dZ}{dt} = (N_2 - N_1) B \frac{p}{\Delta\nu \cdot V} Z h\nu + A N_2$$

$$\frac{dZ}{dt} = (N_2 - N_1) \frac{AV}{h\nu \frac{p}{\Delta\nu} \Delta\nu \cdot V} Z h\nu + \underbrace{\frac{A}{p}}_{\text{spon. Emission in eine Mode}} N_2$$

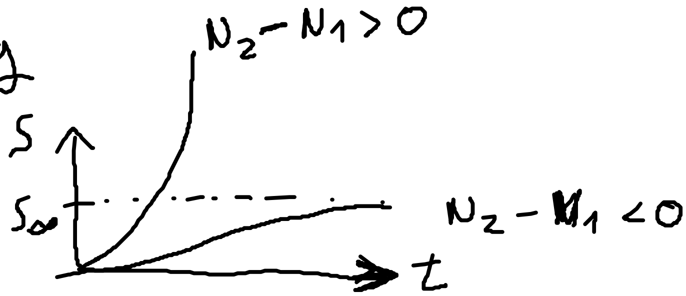
$$\frac{dZ}{dt} = \underbrace{(N_2 - N_1)}\, W\, Z + W N_2$$

$$W = \frac{A}{p} = \frac{A c^3}{V 8\pi \nu^2 \Delta\nu}$$

Dimension $\left[\frac{1}{s}\right]$

Bilanzgleichung ist noch kein Laser (Resonator fehlt)

Lösung



Photonendichte

$$S = \frac{Z}{V}$$

$$S(t) = -e^{\alpha t} + S_\infty$$

- solange therm. GG nur $N_2 - N_1 < 0$. Bose - Einstein Statistik

- Rückkopplungsprinzip

1913 elektrische Rückkopplung von Meißner entdeckt

- selbsterregte Schwingung

optisch : Resonator (speichert Energie)

=> Gleichungen müssen erweitert werden um Term der Energie zuführt (optisches oder elektrisches Pumpen)

$\left(\text{hier: Pumprate } \frac{dN_2}{dt} = \omega_{21} N_1\right)$

$\Rightarrow$ Laser - Bilanzgleichungen

Änderung der Photonendichte:

$$\text{(I)} \quad \frac{dS}{dt} = W(N_2 - N_1)S + \frac{W}{V}N_2 - \underbrace{2\kappa S}_{\substack{\text{optische} \\ \text{Verlustrate} \\ \text{im Resonator}}}$$

Lebensdauer der Photonen $\tau_{ph} = \frac{1}{2\kappa}$

Änderung der Zahl besetzter E_2 Niveaus:

$$\text{(II)} \quad \frac{dN_2}{dt} = \underbrace{\underbrace{\omega_{21}N_1}_{\text{Pumprate}} - \underbrace{\omega_{12}N_2}_{\substack{\text{strahlungslose} \\ \text{Übergangsrate}}}}_{\substack{\hat{=}\ \text{Energiezufuhr durch} \\ \text{Pumpen}}} - \underbrace{(N_2 - N_1)WS}_{\substack{\text{induzierte} \\ \text{Prozesse}}} - \underbrace{\frac{W}{V}N_2}_{\substack{\text{spont.} \\ \text{Emission}}}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = -\frac{dN_1}{dt}$$

da $\frac{dN}{dt} = 0 = \frac{d}{dt}(N_1 + N_2)$