3. Semiklassische Lasergleichungen (Fortsetzung)

Entwicklung nach Moden λ:

$$\underline{E}(\underline{x},t) = \sum_{\lambda} E_\lambda(t)\,\underline{u}_\lambda(\underline{x})$$

elektr. Feld

→ aus Maxwellgleichungen folgt dann

$\underline{j} = \sigma \underline{E}$

$$\omega_{\lambda'}^2 E_{\lambda'} + \ddot{E}_{\lambda'} + \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{\lambda} \sigma_{\lambda\lambda'}\,\dot{E}_\lambda = -\frac{1}{\varepsilon_0}\ddot{P}_{\lambda'}$$

Polarisation des Mediums

3.2 Materiegleichungen

- aktives Medium (hier 2 Niveau System) wird quantenmechanisch beschrieben

Schrödingergleichung: $i\hbar\dot{\psi}(\underline{r},t) = H\psi(\underline{r},t)$

Elektronenwellenfkt

WW mit Licht

Hamiltonian: $H = H_0 + H_W$

ungestörter Anteil der Elektronenbewegung im Atom

$$H_0\varphi_j = E_j\varphi_j \qquad (j=1,2)$$

E_2

Eigenwerte ↑ Atom-Eigenzustände ↑ —— E_1

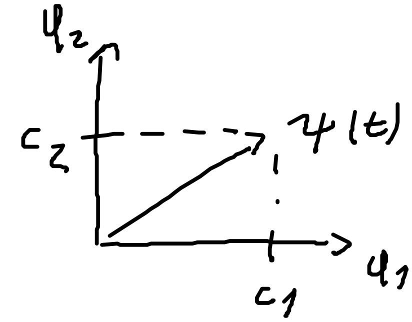
$$H_W = e\,\underline{r}\cdot\underline{E}(t)$$ Störoperator

WW mit elektrischem Feld

$e\cdot\underline{r}$: Operator des el. Dipolmoments

Entwicklung der Wellenfunktion nach ONS (φ_1, φ_2)

$$\psi(\underline{r},t) = c_1(t)\,\varphi_1(\underline{r})\,e^{-i/\hbar E_1 t} + c_2(t)\,\varphi_2(\underline{r})\,e^{-i/\hbar E_2 t}$$



=> Einsetzen in Schrödingergl.

$$i\hbar\left[\dot c_1 \varphi_1 e^{-i/\hbar E_1 t} + \dot c_2 \varphi_2 e^{-i/\hbar E_2 t}\right] + \underline{c_1 E_1 \varphi_1 e^{-i/\hbar E_1 t} + c_2 E_2 \varphi_2 e^{-i/\hbar E_2 t}}$$

$$= \underbrace{H_0 c_1 \varphi_1 e^{-i/\hbar E_1 t} + H_0 c_2 \varphi_2 e^{-i/\hbar E_2 t}}_{\text{EW Gleichung}} + c_1 H_W \varphi_1 e^{-i/\hbar E_1 t} + c_2 H_W \varphi_2 e^{-i/\hbar E_2 t}$$

$\Rightarrow$ da φ_1, φ_2 orthogonal kann man durch $\int dr\, \varphi_j^* e^{i/\hbar E_j t}$ auf φ_j projizieren

(*1)

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{c}_1 &= \frac{1}{i\hbar}\, c_2\, \underline{E}(t)\, \underline{\mu}_{12}\, e^{-i\bar{\omega} t} \\ \dot{c}_2 &= \frac{1}{i\hbar}\, c_1\, \underline{E}(t)\, \underline{\mu}_{21}\, e^{i\bar{\omega} t} \end{aligned}}$$

$\hat{=}$ Schrödingergleichung + ONS φ_1, φ_2

atomare Übergangsfrequenz: $\bar{\omega} = \dfrac{E_2 - E_1}{\hbar}$

$\underline{\mu}_{jk} := \int \varphi_j^*\, e\underline{r}\, \varphi_k\, d\underline{r}$ Matrixelemente des Dipoloperators (statisch!)

$\underline{\mu}_{11} = \underline{\mu}_{22} = 0$

es gilt $\underline{\mu}_{21} = \underline{\mu}_{12}^*$

<u>Ziel</u>: Berechnung des dynamischen el. Dipolmomentes eines Atoms

$$\tilde{\underline{p}}(t) := \langle -e\underline{r} \rangle = -\int \psi^*\, e\underline{r}\, \psi\, d\underline{r}$$

$$= -c_1^* c_2\, \underline{\mu}_{12}\, e^{-i\bar{\omega} t} - c_2^* c_1\, \underline{\mu}_{21}\, e^{i\bar{\omega} t}$$

$$= \tilde{\underline{p}}^{(+)} + \tilde{\underline{p}}^{(-)}$$

$$= -p(t)\underline{\mu}_{12} - p^*(t)\underline{\mu}_{12}^*$$

$$\boxed{p(t) := c_1^*(t)\, c_2(t)\, e^{-i\bar{\omega}t}}$$

Bewegungsgleichung für $p(t)$:

$$\dot{p} = -i\bar{\omega}p + c_1^* \dot{c}_2\, e^{-i\bar{\omega}t} + \dot{c}_1\, c_2^*\, e^{-i\bar{\omega}t}$$

$$\overset{(*)_1}{=} -i\bar{\omega}p + \frac{1}{i\hbar}|c_1|^2 \underline{E}(t)\underline{\mu}_{21}\, e^{i\bar{\omega}t - i\bar{\omega}t}$$

$$+ \frac{1}{i\hbar}|c_2|^2 \underline{E}(t)\underline{\mu}_{12}^*\, e^{i\bar{\omega}t - i\bar{\omega}t}$$

$$= -i\bar{\omega}p - \frac{1}{i\hbar}\underline{E}(t)\underline{\mu}_{21}\underbrace{\left[|c_2|^2 - |c_1|^2\right]}_{\text{Inversion eines Atoms}}$$

$|c_1|^2$ Besetzungswahrsch. für E_1

$|c_2|^2$ " " E_2

$\Rightarrow$ Dynamik der Polarisation ist ungedämpfter getriebener Oszillator $\quad p \sim e^{-i\bar{\omega}t}$

Bemerkung:

In 2. Quantisierung

$$\langle \dot{\hat{p}} \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{p}] \rangle$$

- muss in 2. Quant. formuliert werden
- Vertauschungsrelat.:

Bisher nicht betrachtet: Dämpfung von p durch Stöße oder WW mit Photonen

$\rightarrow T_2$ Zeit

siehe 2.4.1.

$\rightarrow$ Phänomenologischer Ansatz

$$\dot{p} = -\gamma p \qquad \gamma = \gamma_0 + \frac{1}{T_2}$$

$$\boxed{\dot{p} = -i\bar{\omega} p - \gamma p - \frac{1}{i\hbar} \underline{E}(t) \mu_{21}\, d} \qquad (\mathrm{I})$$

Osz.   Dämpfg   WW mit Laserfeld

Bewegungsgleichung für Inversion $d(t)$

$$\dot{d} = c_2^* \dot{c}_2 + \dot{c}_2^* c_2 - c_1^* \dot{c}_1 - \dot{c}_1^* c_1 = \frac{d}{dt}\left(|c_2|^2 - |c_1|^2\right)$$

$$(*_1) \longrightarrow = \frac{\underline{E}(t)}{i\hbar}\Big(\underline{\mu}_{21} c_1 c_2^* e^{i\bar{\omega} t} - \underline{\mu}_{21}^* c_1^* c_2 e^{-i\bar{\omega} t} - \underline{\mu}_{12} c_1^* c_2 e^{-i\bar{\omega} t} + \underline{\mu}_{12} c_1 c_2^* e^{i\bar{\omega} t} \Big)$$

$$\dot{d} = \frac{2}{i\hbar} \underline{E}(t) \left(\underline{\mu}_{12}^* p^* - \underline{\mu}_{12} p \right)$$

WW der Atome mit Umgebung

Pumpen + strahlungslose Relaxation

Phänomenologisch $\frac{d_0 - d}{T_1}$

$$\boxed{\dot{d} = \frac{2}{i\hbar} \underline{E}(t) \left(\underline{\mu}_{12}^* p^* - \underline{\mu}_{12} p \right) + \frac{d_0 - d}{T_1}} \qquad (\mathrm{II})$$

Gl. (I) und (II) sind identisch mit den Blochschen Gleichungen für einen Elektronenspin im Magnetfeld $\underline{H}(t)$

Polarisation $\hat{=}$ "Spin"

Rotationsfrequenz heißt Rabifrequenz

$$\Omega = \frac{E\,\mu_{21}}{\hbar}$$

Merke: • Spontane Emission wird erst durch volle QM-Beschreibung des Feldes richtig beschrieben

• stimulierte Emission jedoch schon in der semi-klassischen Theorie

Übergang zu makroskopischen Materiegleichungen

- die einzelnen Atome seien mit Index n bezeichnet

Makroskopische Polarisation (= Dipoldichte)

$$\underline{P}(\underline{x},t) := \sum_n \delta(\underline{x}-\underline{x}_n)\,\tilde{\underline{p}}_n$$

$$= \sum_n \delta(\underline{x}-\underline{x}_n)\left[\,p_n(t)\,\underline{\mu}_{12} + p_n^*(t)\,\underline{\mu}_{12}^*\right]$$

$$= \underline{P}^{(+)}(\underline{x},t) + \underline{P}^{(-)}(\underline{x},t)$$

Makroskopische Inversionsdichte

$$D(\underline{x},t) := \sum_n \delta(\underline{x} - \underline{x}_n)\, d_n$$

„Glättung" der Funktion durch Mittelung über kleine Volumina

$$\frac{d}{dt}\underline{p}^{(+)} = (-i\bar{\omega} - \gamma)\underline{p}^{(+)} + \frac{1}{i\hbar}\left(\underline{E}\,\underline{\mu}_{21}\right)\underline{\mu}_{12}\, D \qquad (\mathrm{I}')$$

$$\frac{d}{dt} D = \frac{D_0 - D}{T_1} - \frac{2}{i\hbar}\underline{E}\left(\underline{p}^{(-)} - \underline{p}^{(+)}\right) \qquad (\mathrm{II}')$$

$\underline{p}(x,t)$

$\underline{E}(\underline{x},t)$

$D(\underline{x},t)$

$$\Delta\underline{E} - \frac{1}{c^2}\ddot{\underline{E}} - \mu_0\sigma\dot{\underline{E}} = \mu_0\left(\ddot{\underline{p}}^{(+)} + \ddot{\underline{p}}^{(-)}\right) \qquad (\mathrm{III})$$

Wellengleichung

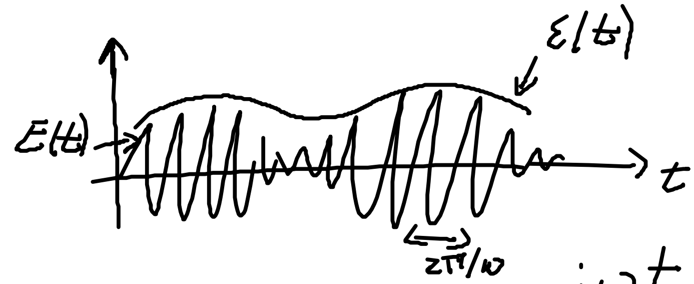
Gleichungen I – III sind Grundgleichungen der semiklassischen Lasertheorie

3.3. Näherungen der Laser-Grundgleichungen

Wir führen 2 Naherungen ein

1) Rotating wave approximation (RWA)

2) Slowly varying amplitude approximation (SVA)



$$E(t) = \varepsilon(t)\, e^{i\omega t}$$