2.1.3. Relaxationsoszillationen (Fortsetzung)

(i) 1. Fall : Fixpunkt oberhalb der Laserschwelle
hat komplexen Eigenwert mit $\mathrm{Re}\lambda < 0$

→ RO Oszillationen

$$\lambda = -\Gamma \pm i\omega$$

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{4\det A - (\mathrm{tr}A)^2}$$

<u>Bedingungen</u>

$\det A > 0$

$\mathrm{tr}A < 0$

$\mathrm{tr}A^2 < 4\det A$

$$\dot{D} = \frac{D_0 - D}{T_1} - 2WDS$$

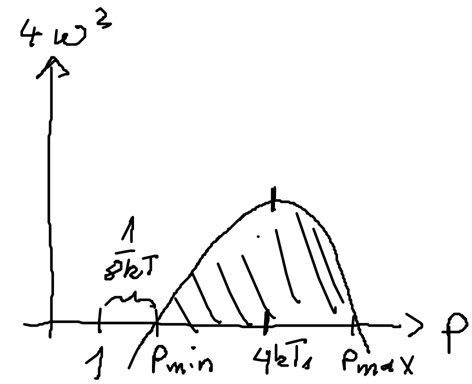
$$\dot{S} = WDS - 2kS$$

Bilanzgl.

$$\mathrm{tr}A = -\frac{P}{T_1} = -\frac{D_0 W}{2kT_1}$$

$$\det A = \frac{2k(P-1)}{T_1}$$

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8k}{T_1}(P-1) - \frac{P^2}{T_1}}$$



- Der Bereich des Pump Parameters in dem es RO Oszillationen gibt ist begrenzt durch

$$-P^2 + 8kT_1P - 8kT_1 > 0$$

- notwendige Vorraussetzung $\quad 2kT_1 > 1$

„Elektronen müssen länger leben als Photonen in der Kavität"

- Zeitskalentrennung
  je größer $2kT_1$ desto ausgeprägter sind die RO-Oszillationen

Zeitskalenparameter $\gamma = \frac{\tilde{\tau}_{ph}}{T_1} = (2kT_1)^{-1}$

- $\boxed{\text{Class B Lasers}}$ (wenn γ klein)
- direkt an der Schwelle tritt keine Oszillation auf

Größenordnungen

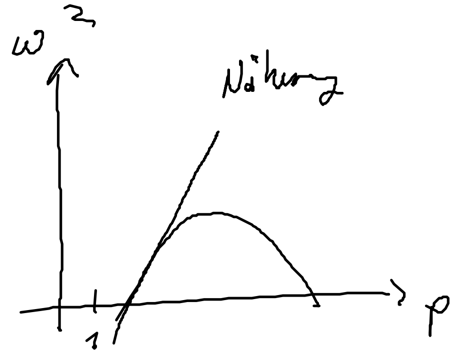
Laser	$\tilde{\tau}_{ph} = (2k)^{-1}$ (s)	T_1 (s)	$\gamma = (2kT_1)^{-1}$
CO_2	10^{-8}	$4 \cdot 10^{-6}$	$2{,}5 \cdot 10^{-3}$
Festkörper	10^{-6}	$2{,}5 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-3}$
Halbleiter GaAs	10^{-12}	10^{-9}	10^{-3}
HeNe	10^{-7}	10^{-8}	> 1

Class B

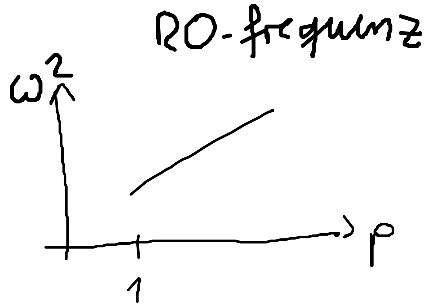
- Näherung für $P << 4kT$ und somit

$$\frac{P^2}{T_1^2} << \frac{8k}{T_1}(P-1)$$

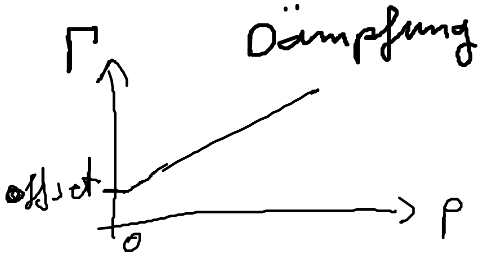
$$\Rightarrow \omega^2 \approx \frac{2k}{T_1}(p-1)$$



Messung



$\Rightarrow$ Bestimmung von τ_{ph} oder T_1 möglich



$$\Gamma = \frac{p}{2T_1}$$

$\Rightarrow$ Bestimmung von T_1 möglich

Bem.: Zusätzliche Effekte die noch nicht berücksichtigt wurden verursachen offset von Γ

(ii) 2. Fall: Lasender Fixpunkt ist reell

$\det A > 0$

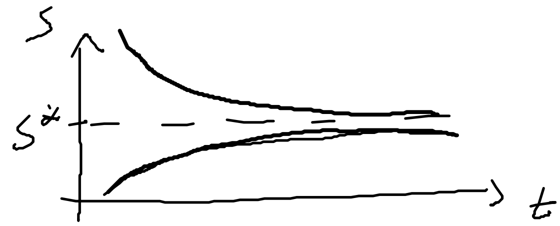
$\mathrm{tr} A < 0$

$\mathrm{tr} A^2 > 4 \det A \quad \rightarrow$ für alle p falls $4kT < 1$

sonst für sehr große $p \gg 4kT$

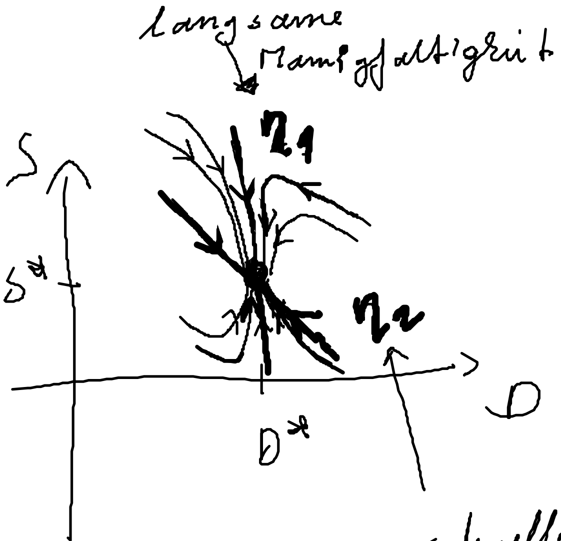
Class A Laser

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \delta D \\ \delta S \end{pmatrix} = c_1 \eta_1 e^{-|\lambda_1| t} + c_2 \eta_2 e^{-|\lambda_2| t}$$



$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\frac{p}{T_1} \pm \sqrt{\frac{p^2}{T_1^2} - \frac{8k(p-1)}{T_1}}$$

- Trajektorien nähern sich exponentiell dem Fixpunkt an



Phasenportrait

- alle Trajektorien nähern sich tangential zur Eigenrichtung mit dem betragsmäßig kleinsten EW an den Fixpunkt an

<u>stabiler Knoten</u>

- λ_1 und λ_2 definieren 2 Zeitskalen im System
- wenn Größenordnung stark verschieden ist, dann ist Dynamik nach kurzer Zeit durch die langsame Richtung beschreibbar

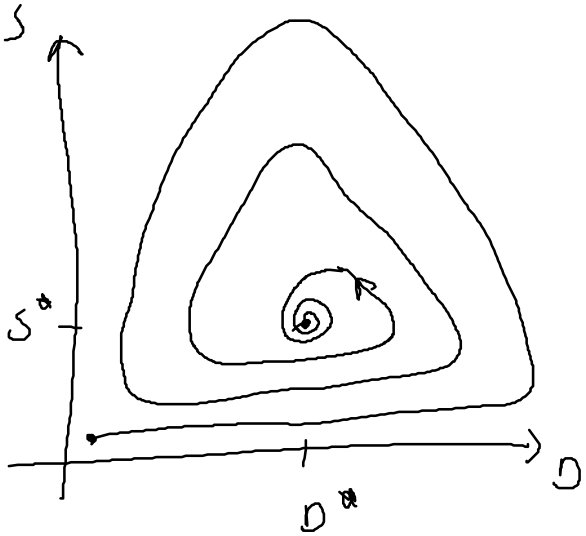
falls $4kT \ll 1$ $(p \gg 1)$

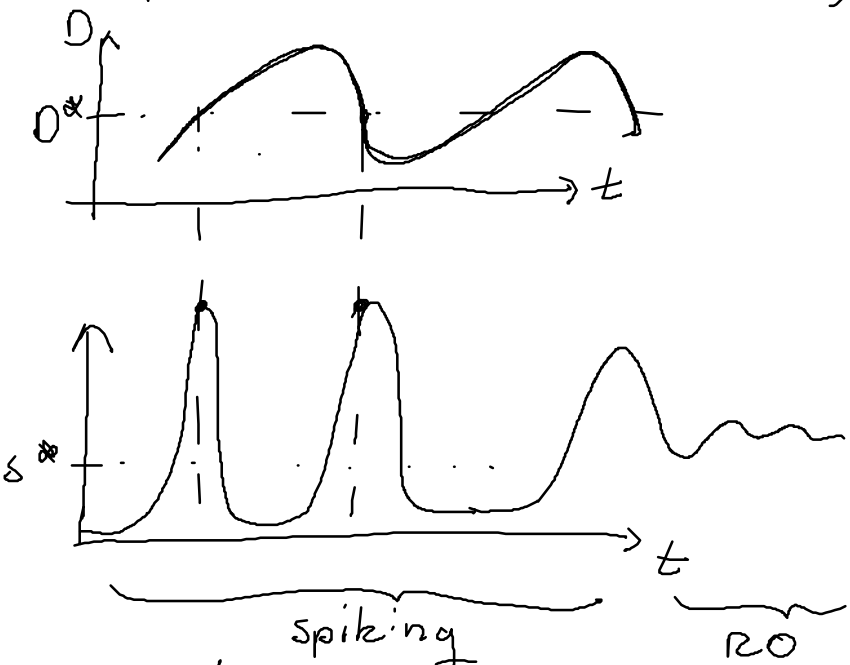
$$\lambda_2 \approx -\frac{p}{T_1} + \frac{p-1}{p} 2k \quad \text{schnell}$$

$$\lambda_1 \approx 0 - \frac{p-1}{p} 2k \quad \text{langsam}$$

2.1.4. Dynamik für große Abweichungen vom Fixpunkt

(→ nichtlineare asymptotische Analyse der DGL)





• nichtlinear verzerrte Oszillationen für $\gamma \ll 1$

Ziel: Näherungslösung für spiking

• Verwenden von Dimensionslosen Gl.

(GL 3) $\dot{I} = I(D-1)$

(GL 4) $\dot{D} = \gamma(P - D(1+I))$

Gl 3,4 äquivalent zu bisherigen Bilanzgleichungen ohne spon. Emission mit Transformation:

$$I = 2 w T_1 S \qquad P = \frac{w}{2k} D_0$$

$$D = \frac{w}{2k} D_{alt} \qquad \gamma = \frac{\tau_{ph}}{T_1}$$

$$t = \frac{t^{alt}}{\tau_{ph}}$$

Problem: Grenzfall $\gamma \to 0$ liefert unphysikalische Lösungen

$$\to \dot{D} = 0 \qquad \to \qquad \dot{I} = I\,(D(0) - 1)$$

$$D(t) = D(0) \qquad\qquad I(t) = I(0)\, e^{[D(0)-1]t}$$

$I \to 0$ oder
$I \to \infty$

Lösung: Reskalieren der Gleichungen damit γ nicht mehr die rechte Seite multipliziert

Ansatz:

$$s = \sigma t \qquad \text{neue Zeit } s$$

$$\left.\begin{aligned} I &= P - 1 + \alpha y \\ D &= 1 + \beta x \end{aligned}\right\} \text{Abweichung vom Fixpunkt}$$

Gesucht: σ, α, β

Bedingung: wenige Parameter
γ nicht vor rechten Seite

$\Rightarrow$

$\longrightarrow$ Hausaufgabe

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{y} &= (1 + y)\, x && \text{(Gl 5)} \quad \text{Intensität} \\ \dot{x} &= -y - \underbrace{\sqrt{\frac{\gamma}{P-1}}\, x\,\big(P - (P-1)\, y\big)} && \text{(Gl 6)} \quad \text{Inversion} \end{aligned}}$$

klein für $\mu \to 0$ und $(p-1)$ fest

- Nun ist Grenzfall $\mu \to 0$ möglich und führt auf konservatives System

<u>Def.: konservativ</u>

· Ein System $F(\underline{x}) = \dot{\underline{x}}$ ist konservativ, wenn es eine Funktion C gibt, so dass

$$\underline{F}\, \nabla_x C = 0$$

$\mu \to 0$: ungestörtes Problem

$$\dot{x} = -y$$
$$\dot{y} = (1+y)\,x$$

Erhaltungsgröße

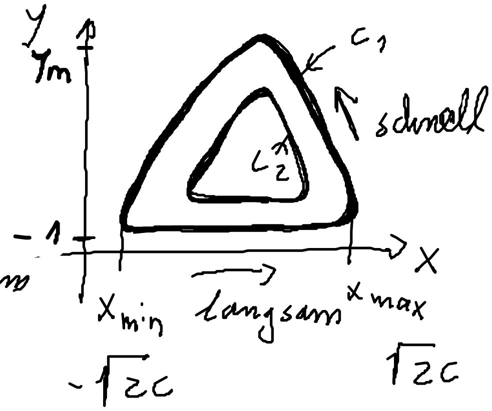
$$C = \frac{x^2}{2} + y - \ln(1+y)$$

$$\nabla C = \begin{pmatrix} x \\ 1 - \frac{1}{1+y} \end{pmatrix}$$

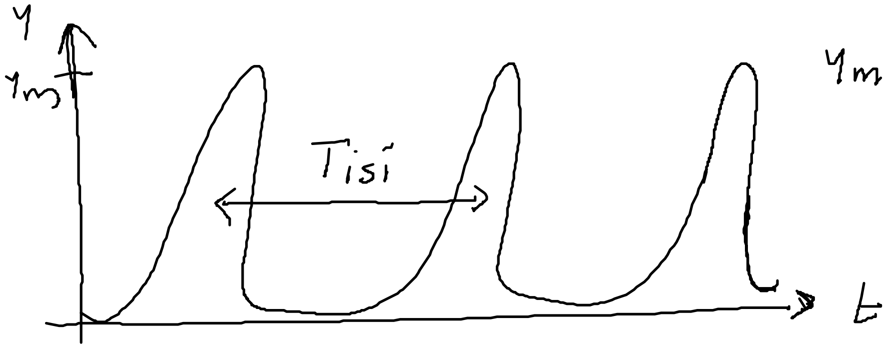
$$\underline{F} = \begin{pmatrix} -y \\ (1+y)\,x \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla C \cdot F = 0$$

→ System ist ungedämpft

$$x(y) = \pm \sqrt{2\left(C - y + \ln(1+y)\right)}$$



- zu jedem C gibt es eine Trajektorie im Phasenraum
- C durch AB gegeben
- nichtlineare Schwingungen



$y_m = c$

$y = -1 \rightarrow I = 0$

- Interspike Intervall

  T_{isi} : Zeit zwischen den spikes
  Zeit während $\underline{I} = 0$

DGL: $\dot{x} = 1$

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} dx = \int_t^{t+T_{isi}} ds$$

$$2\sqrt{2c} = T_{isi}$$

Periode hängt von c also von AB ab

- Maximale Intensität von y ist $y_m = c$ (wenn $x = 0$)

$$\Rightarrow y_m = \frac{T_{isi}^2}{8}$$

Periode und Intensität der spikes sind korreliert!
messbar

- Analytisch entspricht der DGL eines Oszillators mit nichtlinearer Dämpfung

$$\dot{y} = (1+y)x$$
$$\dot{x} = -1$$

$$\rightarrow 0 = \ddot{x} + x - \dot{x}x$$

Bem: Lösung mit Potenzreihenansatz mit gestreckter Zeit $\tilde{\tau}$

$$\tilde{\tau} = \left(1 - \frac{1}{6} A^2\right) s$$

$$x(\tilde{\tau}) = i A e^{i\tilde{\tau}} + \frac{1}{3} A^2 e^{2i\tilde{\tau}} + c.c. + O(A^3)$$

$$y(\tilde{\tau}) = A e^{i\tilde{\tau}} - \frac{2}{3} A^2 e^{2i\tilde{\tau}} + c.c + O(A^3)$$

A : Amplitude der Abweichung vom Fixpunkt

- für die volle Dynamik des Lasers mit Dämpfung muss nächste Ordnung in μ mitgenommen werden (Gl 5,6)