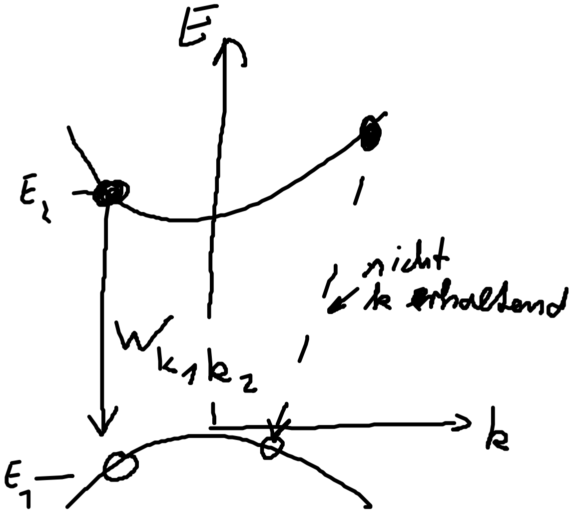
2.3.3. Ableitung von Bilanzgleichung



bisher bei Einstein

$$R_A = N_1 B S$$

jetzt

$$R_A^k = W_{k_1k_2} \cdot f_v (1-f_c) S$$

für spontane Emission (und ind. Emiss.) gilt k-Erhaltung da Photonenimpuls klein gegenüber Elektronen-Quasi-Impuls

stim. Absorptionsrate:

$$R_A = 2S \sum_{k_1,k_2} \underbrace{W_{k_1k_2}\, f_v^{\,k_1} (1-f_c)^{k_2}\, \overset{\text{k-Erhaltung}}{\delta_{k_1,k_2}}}_{\alpha}$$

$$= S \int_{E_c}^{\infty} \int_{-\infty}^{E_v} dE_1\, dE_2\, D(E_1)\, D(E_2)\, \alpha$$

Neue Variable Energiedifferenz $E = E_1 - E_2$

k-Erhaltung

(2D)

$$= S \frac{A^2}{\pi} \int_{E_G}^{\infty} dE\, \underbrace{\frac{2m_r}{\hbar^2}}_{\text{reduzierte Zustandsdichte (2D) } D_r} W_0^h(E)\, f_v(E)\, (1 - f_c(E))$$

reduzierte Masse m_r:

$$E = \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m_1} + \frac{\hbar^2 k_2^2}{2m_2} + E_G$$

$$\frac{dE}{dk} = \hbar k \underbrace{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}_{1/m_r}$$

$W_e^h(E)$
$\hat{=} W_{k_1 k_2}$ für
$E = E_1(k_1) - E_2(k_2)$

stimulierte Emissionsrate

$$R_I = S \frac{A^3}{\pi} \int_{E_G}^{\infty} dE \, \frac{2m_r}{\hbar^2} W_h^e f_c (1 - f_v)$$

$\Rightarrow$ Netto gewinn $\quad G \cdot S \hat{=} R_I - R_A$

elektrisches Feld im Resonator

$\vec{E}(t)^2 \sim S(t)$

Verstärkung / Gain:

im Ort $\quad \frac{dE}{dz} = g E$ ← Feld

in Zeit $\quad \frac{dE}{dt} = g \cdot v \cdot E$

v: Lichtgeschw. im Medium

$2(g \cdot v) = G$

$$G = \int_{E_G}^{\infty} \frac{A^2}{\pi} W(E) \underbrace{\left[f_c(1-f_v) - f_v(1-f_c) \right]}_{f_c - f_v \overset{!}{>} 0} D_r \, dE$$

$$W_e^h = W_h^e = W$$

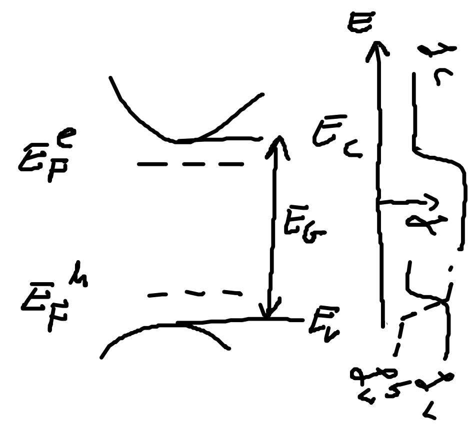
mikroskopisch sind Hin & Rückprozess gleichwahrscheinlich. [Fermi's Goldene Regel]

Bedingung für Inversion

$$0 \overset{!}{<} f_c - f_v = \frac{1}{e^{\frac{E - E_F^e}{kT}} + 1} - \frac{1}{e^{\frac{E^h - E_F^h}{kT}} + 1}$$

$$\boxed{E_F^e - E_F^h > E_G}$$

Bedingung für Laserbetrieb von Bernard & Duraffourg 1961

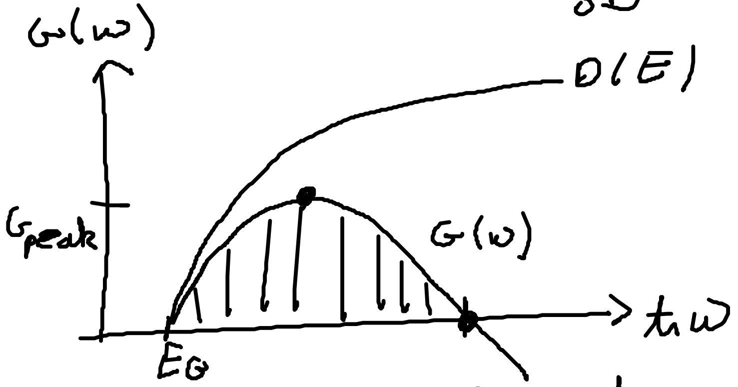


$$E^h = E_G + E$$

$$f_v^h = 1 - f_v$$

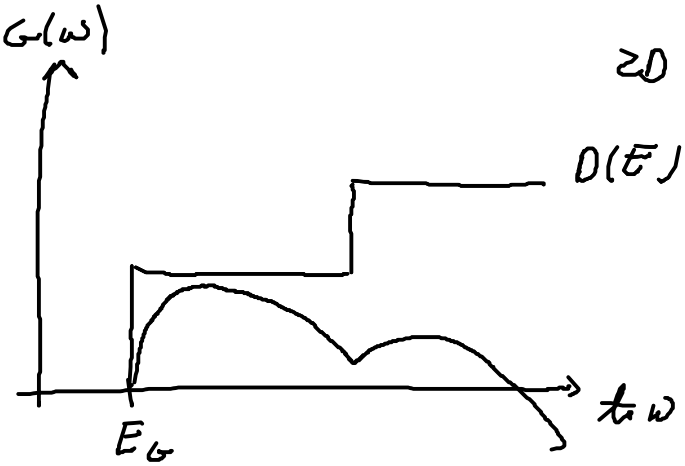
$$G = \int G(\omega)\, d\omega$$

spektraler Gain



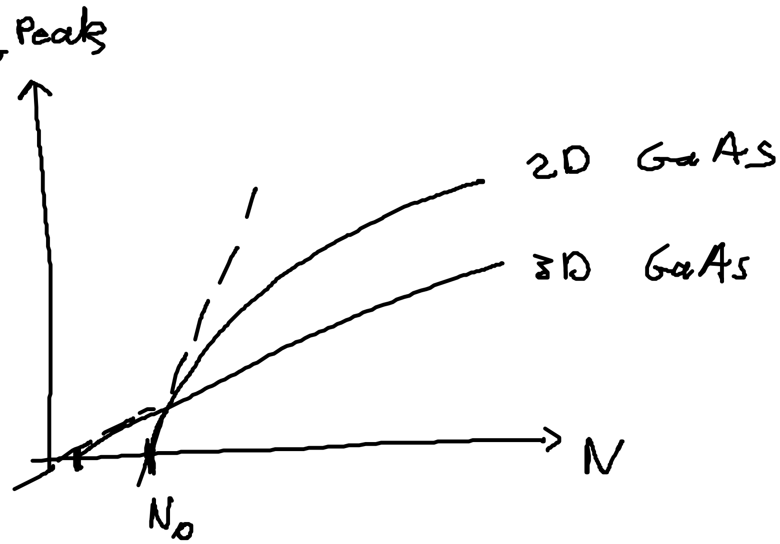
$E_F^e - E_F^h = E_G$

Laser transparent



- für feste Elektronendichte n ist $G(\omega)$ numerisch bestimmbar
- Elektronenzahl $N = V_e \int_0^\infty f_c D_c \, dE$

V_e: Volumen der aktiven Zone



Transparenzladungsträgerdichte
$n_0 \cdot V_e$

differenzieller Gain

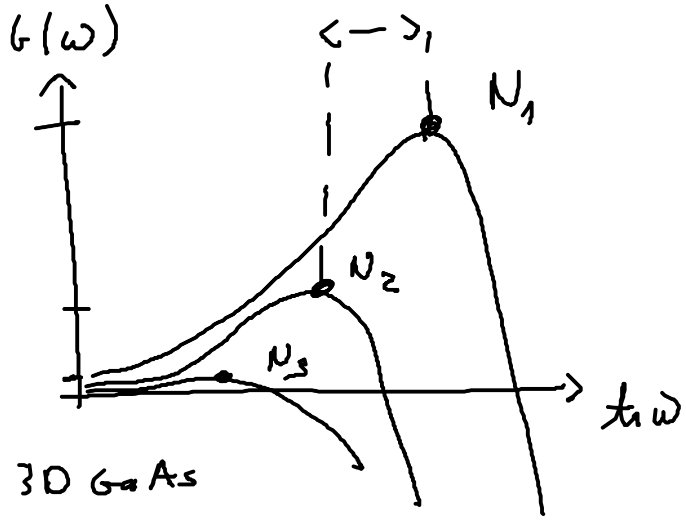
Näherung: $G^{Peak}(N) = g_0 (N - N_0)$

<u>Bemerkung</u>: $\frac{\partial g_0}{\partial N} \neq 0$ ist in lin. Näherung vernachlässigt

$\frac{\partial g_0}{\partial S} = 0$ bedeutet dass nur Gleichgewichts-verteilungen in den Bändern ($f_c \cdot f_v$) berücksichtigt werden

- Falls Relaxationsprozesse in den Bändern langsam sind
  -> Nicht GG Verteilung
  z.B. Lochbrennen
  -> $\frac{\partial g_0}{\partial S} \neq 0$

Frequenzshift bei höherer Elektronenzahl



$N_1 > N_2 > N_3$

- spontane Emission

1. Fall (ohne k-Erhaltung sondern mit Phononbeteiligung)

$$R_{sp} = A^2 \int_{E_c}^{\infty} dE_c \int_{-\infty}^{E_v} dE_h \; W_c^h(E_e, E_h)\, f_c\,(1 - f_v) D_c D_v$$

Annahme
W_e^h nicht energieabhängig

$$= W A^2 \int_{E_c}^{\infty} dE_c \, D_c f_c \int_{-\infty}^{E_v} dE_v \, D_v (1 - f_v)$$

$$\boxed{R_{sp} = W A^2 \cdot n \cdot p} = B^S np$$

- Bimolekularer Term folgt auch aus Massenwirkungskinetik

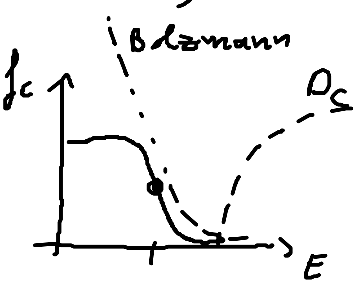
$$e + p \xrightarrow{B^S} \text{Photon}$$

2. Fall (mit k-Erhaltung)

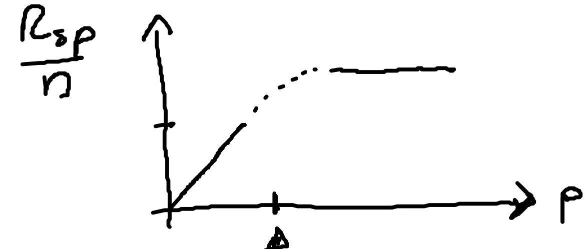
- für kleine Dichten (nicht entartet) kann Besetzung mit Boltzmann Fkt genähert werden

  -> Integral kann gelöst werden

  -> $R_{sp} \sim n \cdot p$



• für Entartung des VB ist die Rate nur noch linear



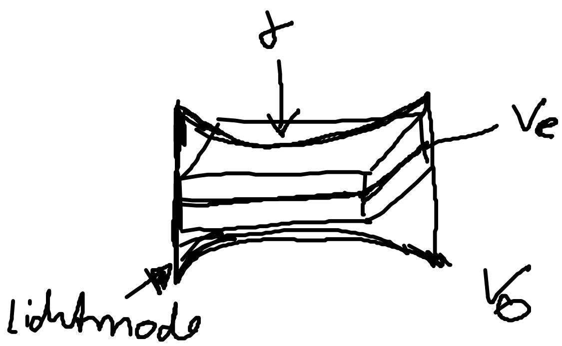
→ Abweichung von Massenwirkungskinetik bei hohen Dichten

Entartungskonzentration $D_c kT$ (2D)
N_c (3D)

• optischer Füllfaktor $\Gamma = \frac{V_e}{V_0}$

← aktive invertierte Schicht

Volumen des Wellenleiters



Zusammenfassen der Terme zur Differentialgl.:

Elektronenzahl $N = n V_e$

Photonenzahl $Z = S \cdot V_0$

spon. Emissionsfaktor (Teil des in die Lasermode emitt. Lichtes)

$$\frac{dZ}{dt} = g_0 (N - N_0) \cdot Z - \overbrace{2\kappa Z}^{\text{opt. Verluste}} + \beta\, n \cdot p\, W V_e^2$$

$$\frac{dN}{dt} = \underbrace{-g_0 (N - N_0) Z}_{\substack{G \cdot S \cdot V_0 \\ \text{Ind. Emis.} - \text{Abs.}}} + \tilde{J}/e_0 - \underbrace{n p W V_e^2}_{R_{sp}}$$

e_0: Elementarladung
$\tilde{J}$: injizierte Ladungen pro Zeit

Umschreiben auf Dichten

$$\frac{dS}{dt} = g_0 \boxed{\frac{V_e}{V_0}} V_0 (n - n_0) S - 2k S + \beta \boxed{\frac{V_e}{V}} n \cdot p W V_e$$

$$\frac{dn}{dt} = g_0 (n - n_0) V_0 S + \tilde{j}/_{e_0 d} - n p V_e W$$

Bilanzgleichungen für HL Laser

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Gamma g_0 (n - n_0) V_0 S - 2k S + \beta \Gamma n p B^s \\ \frac{dn}{dt} &= g_0 (n - n_0) V_0 S + j - n p B^s \end{aligned}}$$

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{dp}{dt}$$

$n - p = N_D^*$

Dotierungsdichte

$\tilde{j}$: Stromdichte die im aktive Schicht injeziert wird

$j = \tilde{j}/_{e_0 \cdot d}$