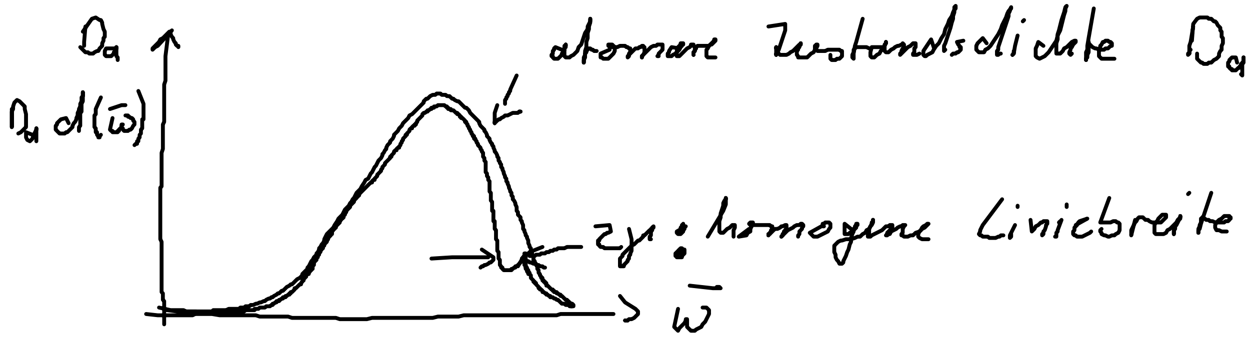
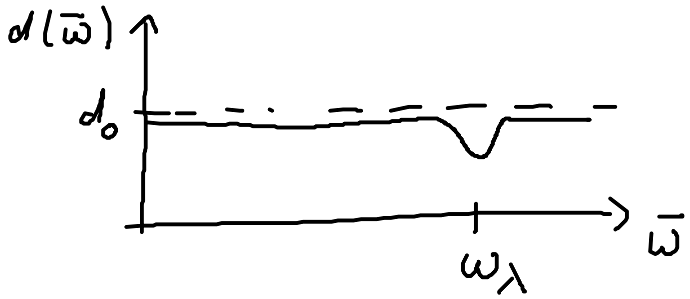
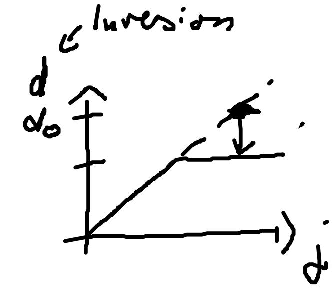
2.4.3. Lochbrennen (Fortsetzung)

a) spektrales Lochbrennen

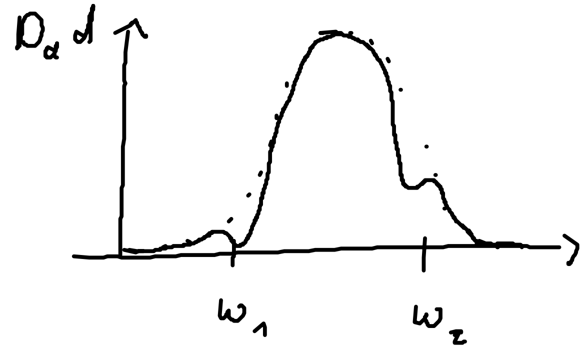






↖ Lichtemission auf Modenfrequenz λ

(i) $|\omega_2 - \omega_1| \gg \gamma$ 2 Lasermoden $S_\lambda \neq 0$ $\lambda = 1, 2$



→ beide Moden beeinflussen sich nicht (gehören zu unterschiedlichen Atomen)

(ii) $|\omega_2 - \omega_1| < 2\gamma$: Modenwettbewerb → gleich

b) Räumliches Lochbrennen

betrachte stehende Laserwelle $u_\lambda(x) \sim \sin k_\lambda x$

Separationsansatz für E-Feld
$$E(x,t) = \sum_\lambda E_\lambda(t) \cdot u_\lambda(x)$$

$$\Rightarrow |u_\lambda(x)|^2 \sim (\sin k_\lambda x)^2$$

ortsabhängig!

$\Rightarrow W_{\lambda\mu}$ räumlich periodisch moduliert

Annahme: homogen verbreiterte Linie

$\bar{\omega}_\mu = \bar{\omega}_0$ hängt nicht von μ ab

$$W_\lambda(x) = \frac{2\gamma}{\gamma^2 + (\bar{\omega}_0 - \omega_\lambda)^2} \underbrace{\left| \underset{\uparrow}{p_{c\lambda}} \frac{2\pi\omega_\lambda}{\hbar} \sin k_\lambda x \right|^2}_{g_{\lambda\mu}}$$

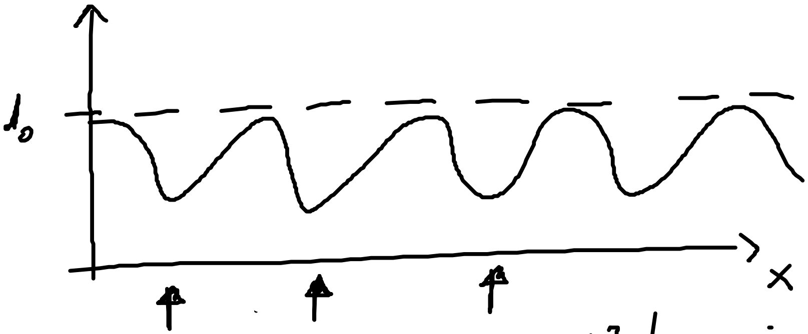
Dipolmoment

<u>1 Mode</u>: Inversion ist räumlich moduliert

Pumpstärke pro Atom

$$d_\mu = \frac{d_0}{1 + 2T \sum_\lambda s_\lambda W_{\lambda\mu}}$$

d



Löcher in der Inversion an den Schwingungsbäuchen

2 Moden: Überlegung wie beim spektralen Lochbrennen

2.4.4. Modenwettbewerb

Annahmen: · laufende Welle $u_\lambda(x) \sim e^{ik_\lambda x}$

· homogen verbreiterte Linie $\bar{\omega}_\mu = \bar{\omega}_0 \to g_{\lambda\mu} = g_\lambda$

$$W_\lambda = \frac{2\gamma}{\gamma^2 + (\bar{\omega}_0 - \omega_\lambda)^2} |g_\lambda|^2$$

⇒ Bilanzgl.:

$$\frac{dS_\lambda}{dt} = \Big(W_\lambda \underbrace{\sum_\mu d_\mu}_{D \text{ gesamtinversion}} - 2\kappa_\lambda \Big) S_\lambda$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{D_0 - D}{T} - 2D \sum_\lambda S_\lambda W_\lambda$$

nur eine Gleichung
wegen Vernachlässigung der
inhomogenen Breite

stationäre Lösungen

$$(W_\lambda D - 2k_\lambda) S_\lambda = 0 \Rightarrow S_\lambda = 0 \vee D = \frac{2k_\lambda}{W_\lambda}$$

Sei $S_\lambda \neq 0$ für $\lambda = 1, 2, \ldots$

$$\Rightarrow D = \frac{2k_2}{W_2} = \frac{2k_1}{W_1} = \frac{2k_\lambda}{W_\lambda} = \ldots \qquad (*)$$

dies ist nicht für mehrere Moden
gleichzeitig erfüllbar!

Sei z.B. $k_1 = k_2 = \ldots$ aber $\omega_1 \neq \omega_2 \neq \ldots$
dann folgt $W_1 \neq W_2 \neq \ldots$ Widerspruch zu $(*)$

Also: $\boxed{\text{nur für ein } \lambda \text{ ist } S_\lambda \neq 0}$

(dasjenige, dessen Frequenz der atomaren
Zentralfrequenz $\bar{\omega}_0$ am nächsten liegt)

$\Rightarrow$ **Modenselektion** durch den Laserprozess!

Modenkoexistenz: möglich, falls Photonen der verschiedenen
Moden von verschiedenen Atomen

erzeugt werden

(i) laufende Welle
+ inhomogen verbreiterte Linie mit
$|\omega_1 - \omega_2| > 2\gamma$

(ii) stehende Wellen (u_1 und u_2)
+ homogen verbreiterte Linie

$u_1(x)$

$u_2(x)$

Bemerkung: Effekte wie Modenkopplung, die von der Phase des Lichtes abhängen können noch nicht beschrieben werden

$\rightarrow$ Semiklassische Lasergleichungen

3. Semiklassische Lasergleichungen

- bisher: – heuristisch motivierte Gleichungen
  - -> nun Herleitung
  - – keine Phase der Lichtmode
  - -> Effekte wie Modenkopplung, Rückkopplung können dann beschrieben werden

- jetzt: Startpunkt Maxwellgleichung [Licht klassisch]
  Schrödingergleichung für Atome [WW quantenmechanisch]

3.1, Wellengleichung für das elektrische Feld

Maxwellgleichungen

$$\mathrm{rot}\,\underline{E} = -\dot{\underline{B}}$$

$$\mathrm{rot}\,\underline{H} = \underline{j} + \dot{\underline{D}}$$

$$\mathrm{div}\,\underline{B} = 0$$

$$\mathrm{div}\,\underline{E} = 0$$

(keine Kopplung an Ladungen:
-> das elektrische Feld ist transversal
$\underline{k}\cdot\underline{E} = 0$

$\underline{E}$ elektrisches Feld
$\underline{D}$ dielektrische Verschiebung
$\underline{H}$ Magnetfeld
$\underline{B}$ magn. Induktion

Materialgleichungen

a) $\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$

↑ Polarisation des Lasermediums (gesamtes Dipolmoment der Atome pro Volumen)

⟶ muss noch berechnet werden

(klass. Oszillatormodell

$\underline{P} = \sum_\mu P_\mu \quad , \qquad P_\mu = \frac{e^2/m}{\bar{\omega}_0^2 - \omega_\lambda^2 - 2i\gamma_0\omega_\lambda} \cdot \underline{E}(\underline{x}, t)$

$\Rightarrow \underline{P} \sim \underline{E}$

kann Lasertätigkeit nicht erklären)

⟶ QM Modell nötig

b) $\underline{B} = \mu_0 \underline{H}$ nichtmagnetisches Material

c) Stromdichte $\underline{j} = \sigma \underline{E}$ (ohmsches Gesetz)

↑ Leitfähigkeit

$\Rightarrow$ Wellengleichung

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\, \underline{E}) = \mathrm{rot}\, \dot{\underline{B}} = \mu_0 \dot{\underline{j}} + \varepsilon_0 \mu_0 \ddot{\underline{E}} + \mu_0 \ddot{\underline{P}}$$

$$\underbrace{\text{grad div} \underbrace{\underline{E}}_{0} - \Delta \underline{E}} \qquad = \mu_0 \sigma \dot{\underline{E}} + \varepsilon_0 \mu_0 \ddot{\underline{E}} + \mu_0 \ddot{\underline{P}}$$

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$$

$$\boxed{\Delta \underline{E} - \frac{1}{c^2} \ddot{\underline{E}} - \mu_0 \sigma \dot{\underline{E}} = \mu_0 \ddot{\underline{P}}}$$

- für $\underline{P} = 0$ ist dies die Telegrafengleichung, die Wellenausbreitung im leitenden Medium beschreibt
- $\ddot{\underline{P}}$ stellt einen Quellterm für das elektrische Feld dar

Elektrisches Feld im Resonator

Entwicklung nach Moden λ: $\underline{E}(\underline{x}, t) = \sum_\lambda E_\lambda(t)\, u_\lambda(\underline{x})$

die $u_\lambda(x)$ sind Lösungen von

$$\Delta u_\lambda(\underline{x}) + \underbrace{\frac{\omega_\lambda^2}{c^2}}_{k_\lambda^2} \underline{u}_\lambda(\underline{x}) = 0$$

mit geeigneten Randbedingungen

(z.B. period. RB $\rightarrow \underline{u}_\lambda(\underline{x}) \sim e^{i \underline{k}_\lambda x}$ laufende Welle

(im Folgenden) Dirichlet RB $\rightarrow \underline{u}_\lambda(\underline{x}) \sim \sin \underline{k}_\lambda x$ stehende Welle
(0 am Rand)

Orthonormalität

$$\int \underline{u}_\lambda(\underline{x})\, \underline{u}_{\lambda'}(\underline{x})\, d\underline{x} = \delta_{\lambda\lambda'}$$

$$\underline{u}_\lambda(\underline{x}) = \underline{e}_\lambda\, u_\lambda(\underline{x})$$

$\uparrow$

Polarisation der Mode

Modenansatz in Wellengleichung:

$$\sum_\lambda \left(-\omega_\lambda^2 E_\lambda - \ddot{E}_\lambda - \sigma \mu_0 \dot{E}_\lambda \right) \underline{u}_\lambda(x) = \mu_0 \ddot{\underline{P}}$$

$\int d\underline{x}\, \underline{u}_{\lambda'}(\underline{x}) \ldots \Rightarrow$

$$\boxed{\omega_{\lambda'}^2 E_{\lambda'} + \ddot{E}_{\lambda'} + \sum_\lambda \sigma_{\lambda'\lambda} \dot{E}_\lambda = -\frac{1}{\varepsilon_0} \ddot{P}_{\lambda'}}$$

- mit $\sigma_{\lambda'\lambda} := \int u_{\lambda'}\, \sigma\, u_\lambda\, d\underline{x}$

  (für räumlich-homogene Leitfähigkeit: $\sigma_{\lambda'\lambda} = \sigma\, \delta_{\lambda'\lambda}$

  für räuml. inhomogene Leitfähigkeit koppeln verschiedene Moden über σ)

- $P_\lambda(t) := \int \underline{u}_\lambda(\underline{x})\, \underline{P}(\underline{x}, t)\, d\underline{x}$